Զրբաշյան - 90

Գիտաժողովի թեզիսներ

27-28 նոյեմբերի 2008 թ., Երևան

О ПАРАМЕТРАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А. В. АБРАМЯН
ВГПИ

Известно (см. [1]), что произвольная последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, подчиненная единственному условию $|a_k| < 1$, определяет систему ортогональных на единичной окружности многочленов $\{\Phi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ со старшими коэффициентами равными единице:

$$\begin{aligned} &\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{a}_n \Phi_n^*(z), \Phi_0(z) = 1,\ n = 0,1,\cdots \\ &\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - a_n z\Phi_n(z),\ \Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \end{aligned} \qquad (1)$$

и систему ортонормальных на единичной окружности многочленов $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ с распределением $d\mu(\theta)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{\varphi_m\left(e^{i\theta}\right)}d\mu(\theta) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}, \qquad n, m = 0,1,\cdots$$

где

$$\phi_n(z) = \alpha_n \Phi_n(z),\ \alpha_n^{-2} = c_0 \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - |a_k|^2\right),\ \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}},\ c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\mu(\theta),$$

$\mu(\theta)$- функция распределения – ограниченная неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста на отрезке $[0, 2\pi]$, которая определяется однозначно по числам $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, если считать, что $\mu(\theta - 0) = \mu(\theta)$(см. [1]).

Числа $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ называются параметрами ортогональной системы $\{\Phi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ и были впервые введены С. Верблюнским (см. [2]).

Теорема **([3]).** Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$-произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию $|a_k|<1,\ k=0,1,\cdots$ и n_0-произвольное (фиксированное) натуральное число. Рассмотрим многочлены $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, соответствующие параметрам $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$b_k=a_k\,,\ k=0,1,\cdots,n_0-1$$

$$b_k=-|\operatorname{Re}a_k|\operatorname{sgnRe}\nu_k+i|\operatorname{Im}a_k|\operatorname{sgnIm}\nu_k\,,\ k=n_0,n_0+1,\cdots$$

$$\nu_k=\int_0^{2\pi}\xi\frac{\varphi_k(\xi)}{\varphi_k^*(\xi)}\frac{d\theta}{|\varphi_k(\xi)|^4},\ k=n_0,n_0+1,\cdots$$

Если $\sum|a_k|^2<\infty$, то мера $\mu(\theta)$- соответствующая параметрам $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$-абсолютно непрерывна.

1. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958
2. S. Verblunsky. On positive harmonic functions, Prooc. Lond. Math. Soc., 40, 1935, 290-320
3. А. В. Абрамян, “О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. II”, Изв. НАН Армении, Математика, 43, N 2, стр. 3-16, 2008.

Равномерное приближения мероморфными функциями из класса M^{ρ} на полосе

С. Алексанян
asargis@instmath.sci.am

Рассмотривается задача равномерного приближения мероморфными функциями в замкнутой полосе. Аналогичная задача на R рассмотривалась в работе Аракеляна и Аветисяна [1].

Пусть $S_h = \{z \in C : |\mathrm{Im} z| \le h\}$ и $A''(S_h)$- класс функций аналитических в S_h^o и дважды непрерывно дифференцируемых в S_h в смысле R^2.

Теорема 1 Пусть $f \in A''(S_h)$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная функция g, полюсы которой лежат только на мнимой оси, такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in S_h$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_h^{pr} \int_h^{t} \left[\frac{a(\tau, f)}{\varepsilon} + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(pr), \ r \ge h,$$

где

$$a(\tau, f) = \max\{\sup_{|z| \le \tau} (|z| + 1) |f_\partial{}'(z)|, \sup_{|z| \le \tau} (|z| + 1) |f_\partial{}''(z)|\},$$

$f_\partial(z) = f(z)$ на ∂S_h и $k = k(p, h) > 0$.

Функция $g \in M^{\rho}$, если g меромофная функция, полюсы которой лежат только на мнимой оси, ограниченная на S_h и $T(r, g) = O(r^{\rho})$, при $r \to \infty$. Пусть μ_0 - нечетное продолжение на R обратной к r^{ρ} функции $\left(r^{\rho}\right)^{-1}$ и $\mu(z) = \mu_0(x) + iy$, где $z = x + iy$.

Теорема 2 Пусть $f \in A''(S_h)$, ограничена на S_h; и $(f \circ \mu)'$, $(f \circ \mu)''$ ограничены на ∂S_h, тогда f можно равномерно аппроксимировать на S_h функциями из класса $M^{\rho}, (0 < \rho < 1)$.

Задача равномерного приближения на полосе целыми функциями экспоненциального типа была иследована Аракеляном и Шахголяном [2].

Литература

1. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян. Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси, Изв. АН АрмССР, Математика, 25 №6, 1990.
2. N. Arakelian and H. Shahgholian, Uniform and tangential approximation on a stripe by entire functions, having optimal growth, Computational Methods Functions theory, vol. 3,no. 1(2003), 359-381.

Ամբողջ ֆունկցիաներով մոտավորությունների տեսության որոշ հարցերի մասին:

Ն. Հ. Առաքելյան
narakel@sci.am

Սույն զեկուցումը համառոտ ակնարկ է ամբողջ ֆունկցիաներով հավասարաչափ շոշափումային մոտավորությունների խնդիրների շուրջ Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ստացված որոշ արդյունքների վերաբերյալ, ներառյալ շոշափման հնարավոր արագության հարցերը և անկյունային տիրույթներում վերջավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաներով լավագույն մոտավորությունները:

Задача Дирихле для уравнения четвертого порядка в эллиптических областях

А. О. Бабаян

E-mail: barmenak@gmail.com

Пусть D – конечная область, ограниченная эллипсом $\Gamma = \left\{z \in \mathbf{C} : (z - \alpha\bar{z})(\bar{z} - \bar{\alpha}z) = (1 - |\alpha|^2)^2\right\}$ при $|\alpha| < 1$. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in D,$$

с граничными условиями Дирихле

$$u|_\Gamma = f(x,y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = g(x,y),\ \ (x,y) \in \Gamma. \qquad (2)$$

Здесь постоянные μ и ν удовлетворяют условиям $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$, то есть уравнение (1) – правильно эллиптическое. Известные функции f и g принадлежат классам $C^{(1,\delta)}(\Gamma)$ и $C^{(\delta)}(\Gamma)$ соответственно. Решение задачи (1), (2) – функция u, ищется в классе $C^4(D) \cap C^{(1,\delta)}(D \cup \Gamma)$.

Введем следующие обозначения

$$\mu(\alpha) = \frac{\mu + \alpha}{1 + \mu\bar{\alpha}},\ \ \nu(\alpha) = \frac{\nu + \bar{\alpha}}{1 + \nu\alpha},\ \ t(\alpha) = \mu(\alpha)\nu(\alpha).$$

Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Задача Дирихле (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$\Delta_k = \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)(t(\alpha))^{j}, \quad k = 3,4,\ldots. \tag{4}$$

Если при некотором n условие (4) нарушается, то однородная задача (1), (2) (при $f \equiv g \equiv 0$) имеет ненулевое решение – полином степени $n+3$, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо, чтобы граничные функции f и g удовлетворяли одному условию ортогональности.

Используя свойства многочлена Δ_k ([1],[2]) можно получить следующие утверждения:

Теорема 2. *Если постоянная $t(\alpha)$ из (3) удовлетворяет условиям $t(\alpha) > 0$ или $|t(\alpha)| < 0.5$, то задача Дирихле (1), (2) однозначно разрешима.*

Теорема 3. *Если нарушается условие (4) , то однородная задача Дирихле (1), (2) имеет одно линейно независимое решение, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы граничные функции f и g удовлетворяли одному условию ортогональности.*

Литература

1. Borwein P., Erdelyi T., Polynomials and polynomial inequalities, Springer, 485p.
2. Anderson N., E. B. Saff, R. S. Varga, On the Enestrom – Kakeya theorem and its sharpness, Linear Algebra and its Appl. 28(1979), pp. 5 – 16.

О граничных пределах потенциалов типа Грина

С.Л. Берберян

Российско-Армянский (Славянский) университет.

В настоящей заметке рассматривается граничное поведение потенциалов типа Грина, которые были введены академиком М.М.Джрбашяном. Эти потенциалы являются существенным обобщением классических потенциалов Грина. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. Пусть $\omega_\alpha(z)$ -потенциал типа Грина, где $-1<\alpha<0$, и неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию $\Omega(r)=\iint\limits_{|a|<r} d\mu(a)=O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right)$ при $r\to 1$, где $0<\lambda<1+\alpha$. Тогда в каждой точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E\subset\Gamma$, $cap_{1+\alpha}E=0$, существуют равные между собой конечные пределы $\lim\limits_{\substack{z\to\xi \\ z\in h(\xi,\varphi)}} \omega_\alpha(z)=\omega_\alpha(\xi)$ для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$.

Замечание. Отметим, что при $\alpha=0$ автором было получено утверждение теоремы 1 для потенциалов Грина. Это утверждение является усилением соответствующего результата М. Цудзи, где исключительное множество E было охарактеризовано в терминах линейной меры, а, именно, $mesE=0$.

Теорема 2. Пусть $\omega_\alpha(z)$ -потенциал типа Грина , где $-1<\alpha\le 0$, и неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию $\Omega(r)=\iint\limits_{|a|<r} \ln\frac{1}{1-|a|}d\mu(a)=O\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right)$, где $0<\lambda<1+\alpha$. Тогда для всех $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$, кроме, быть может, некоторого множества E, $cap_{1+\alpha}E=0$, при $-1<\alpha<0$

и $cap_0 E=0$ при $\alpha=0$, функция $\omega_\alpha(z)$ имеет конечные радиальные пределы.

Теорема 3. Пусть $\omega_\alpha(z)$ -потенциал типа Грина , где $\alpha \geq 0$, и неотрицательное распределение масс $\mu(a)$ удовлетворяет условию $\Omega(r) = \iint_{|a|<r} d\mu(a) = O(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+\alpha}})$,где $0 \leq \lambda < 1$.

Тогда на Г можно указать такое множество Е , $cap_\beta E = 0$, где $\lambda < \beta < 1$,что для всех $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, кроме, быть может, множества E, для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ существуют хордальные пределы, равные нулю, то есть $\lim_{z \to \xi \in \Gamma \setminus E, z \in h(\xi,\varphi)} \varpi_\alpha(z) = 0$.

ДВУМЕРНЫЙ ВЕЙВЛЕТ – БАЗИС ТИПА ШЕННОНА - КОТЕЛЬНИКОВА И ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА В КЛАССЕ $W_\pi^2(\mathbb{C}^2)$ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ.

Галдунц М.А., ЕГУ

Пусть $1<p<\infty$, $-1<\omega_i<p-1$, $0<\sigma_i<\infty$, $i=1,2$. Обозначим через $W_\sigma^{p,\omega}(\mathbb{C}^2)$ пространство целых функций $f(z)=f(z_1,z_2)$ экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) с нормой

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1,x_2)|^2 |x_1|^{\omega_1} |x_2|^{\omega_2} dx_1 dx_2 \right\}^{1/p} < +\infty . \quad (1.1)$$

Как известно (теорема Пойа - Планшереля), что пространство $W_\pi^{2,0} \equiv W_\pi^2(\mathrm{C}^2)$ имеет равносильное представление в виде следующего ряда, при $\{c_{m,n}\} \in \ell^2$

$$f(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\alpha \frac{\sin \pi(z_1 - m)}{\pi(z_1 - m)} \frac{\sin \pi(z_2 - n)}{\pi(z_2 - n)}, \tag{1.2}$$

при котором ряд (1.2) равномерно сходится на любом компакте в C^2, сходится по норме $L^2(R^2)$, дает линейное топологическое отображение всего ℓ^2 на $W_\pi^2(\mathrm{C}^2)$ и

$$f(m,n) = c_{m,n}, \quad \|f\|_2 = \|\{c_{m,n}\}\|_2 .$$

Имеет место также теорема Винера - Пэли, согласно которому пространство $W_\pi^2(\mathrm{C}^2)$ имеет равносильное интегральное представление

$$f(z_1, z_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t_1, t_2) e^{-i(z_1 t_1 + z_2 t_2)} dt_1 dt_2 ,$$

где $\varphi(t_1, t_2) \in L^2$.

Обозначим

$$V_{0,0} = W_{\pi,\pi}^2 ,$$

$$V_{k_1,k_2} = \left\{ f\left(2^{k_1} z_1, 2^{k_2} z_2\right) st\ f(z_1, z_2) \in V_{0,0} \right\}.$$

Теорема 1.1. Последовательность подпространств $V = \{V_{k_1,k_2}\}_{k_1,k_2}$ образует кратномасштабный анализ (КМА) в $L^2(R^2)$.

Обозначим через U_0 - ортогональное дополнение V_0 в V_1, т.е. $V_1 = V_0 \oplus U_0$.

Лемма 1.1. $\psi \in U_0$ тогда и только тогда $\hat{\psi}(t_1,t_2)=\varphi(t_1,t_2)\lambda_D$, где $\varphi \in L^2(R^2)$ и λ_D - характеристическая функция $D=(-2\pi,2\pi)\times(-2\pi,2\pi)\setminus(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$.

Лемма 1.2. Допустим $\psi \in U_0$. Тогда система функций $\{\psi(x_1-\ell,x_2-k\}_{\ell,k}$ ортогональна в U_0 тогда и только тогда $|\dot{\varphi}(t)|\equiv 1$.

В результате получим аналог известного вейвлета Шеннона - Котельникова в двумерном случае.

Теорема 1.2. Функция

$$\psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi^2(x_1+\alpha)(x_2+\beta)}\left(\sin 2\pi(x_2+\beta)\sin 2\pi(x_1+\alpha)-\sin\pi(x_1+\alpha)\sin\pi(x\right.$$

где $\alpha,\beta \in R$,

является вейвлетом в $L^2(R^2)$, т.е. система функций $\left\{2^{k_1/2+k_2/2}\psi\left(2^{k_1}x_1-\ell_1,2^{k_2}x_2-\ell_2\right)\right\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(R^2)$.

УДК 517

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГАММА ФУНКЦИЙ ЭЙЛЕРА

А.Л.ГРИГОРЯН

Армянский государственный инженерный университет

В работе используя результаты статьи [1], получены следующие формулы

$$\sum_{l=1}^{p-1}\sin \pi l p\cdot\sum_{n=0}^{m-1}\Gamma\left(\frac{np+l}{pm}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{np+l}{pm}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{v=1}^{p-1}A_v(p)\cdot\left(\sum_{i=1}^{vm}\left(\psi\left(1-\frac{2i-1}{2pm}\right)-\psi\left(1+\frac{2i-1}{2pm}\right)+\frac{2pm}{2i-1}\right)\right),$$

$$\sum_{l=1}^{p-1}\sin \pi l/p\cdot\sum_{n=0}^{m-1}\Gamma\left(\frac{np+l}{pm}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{np+l}{pm}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{v=1}^{p-1}A_v(p)\cdot\sum_{i=1}^{vm}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2pm}\cdot\Gamma\left(\frac{2i-\cdots}{2p\cdots}\right.\cdots,$$

в частности, при p=2 имеем

$$\sum_{n=1}^{m}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2m}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{2m}\right)=\sum_{n=1}^{m}\left(\psi\left(1-\frac{2n-1}{4m}\right)-\psi\left(1+\frac{2n-1}{4m}\right)+\frac{4m}{2n-1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{m}\cos\frac{(2n-1)\pi}{4m}\cdot\Gamma\left(\frac{2n-1}{4m}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{4m}\right)=\sum_{n=1}^{m}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2m}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{2m}\right),$$

где

$$A_v(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4(np+v)^2-1},\qquad p\in\mathrm{N},$$

$\Gamma(Z)$, ψ (Z) гамма и пси функции Эйлера.

1. А.Л.Григорян, Дискретные константы Лебега, Матем. Заметки, 1983, Т.34, N6, с. 857-866.

Կոմպակտի ամենահեռու կետերի և Կրեյն-Միլմանի և Ստրաշևիչի թեորեմների մասին

Լ. Գևորգյան, ՀՊՃՀ մաթեմատիկայի դեպարտամենտ

E-mail: levgev@hotmail.com

Դիցուք (X,ρ)– ն մետրիկական տարածություն է, a -ն X -ի կետ է և F – ը X -ի կոմպակտ ենթաբազմություն է: Քանի որ թվային $f(x)=\rho(a,x)$ ֆունկցիան անընդհատ է X -ում և F բազմության վրա հասնում է իր մեծագույն արժեքին, ապա գոյություն ունի գոնե մեկ $b\in F$ կետ, այնպիսին որ $\rho(a,b)=\sup\limits_{x\in F}\rho(a,x)$: Այն կոչվում է F բազմության ամենահեռու կետ a կետից: Նշանակենք F_a -ով F բազմության a կետից ամենահեռու կետերի բազմությունը և $E(F)=\bigcup\limits_{a\in X}F_a$.

Ներկա զեկուցման մեջ քննարկվում է ամենահեռու կետերի բազմության հատկությունները, նրանց կապը ծայրակետերի, անպաշտպան կետերի հետ: Ունիտար տարածության համար ապացուցվում են Մազուրի, Ստրաշևիչի թեորեմների նմանակները: Ցույց է տրվում, որ ամենահեռու կետերի բազմություն բավականին հարուստ է տարրերի քանակի իմաստով:

Որպես օրինակ նշենք հետևյալ արդյունքները:

Թեորեմ 1: Յուրաքանչյուր բաց կիսատարածություն, որը հատվում է F կոմպակտի հետ, պարունակում է F բազմության գոնե մեկ ամենահեռու կետ:

Թեորեմ 2: ՈՒնիտար տարածության յուրաքանչյուր կոմպակտ բազմություն պարունակվում է իր ամենահեռու կետերի փակ գծային թաղանթում:

Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է, որ ուռուցիկ կոմպակտն համընկնում է է իր ամենահեռու կետերի փակ գծային թաղանթի հետ:

О разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью

Х.А. Хачатрян

(Институт математики НАН Армении)

(E-mail: Khach82@rambler.ru)

Интегро-дифференциальными уравнениями вида

$$-y'' + \lambda^2 y = \int_0^\infty K(x,t,y(t))dt, \quad x > 0 \tag{1}$$

описывается ряд важных задач в современной квантовой механике. Кроме того, уравнение (1) имеет применения в теории нелокального взаимодействия волн и в теории бифуркации рождения цикла.

Искомое решение уравнения (1) удовлетворяет следующим двум условиям:

$$y(0) = y_0 \geq 0, \tag{2}$$

$$y \in \mathfrak{M} = \{ f : f' \in C_A^{loc}(0,+\infty), \forall \varepsilon > 0, \lim_{x\to\infty} e^{-\varepsilon x} f(x) = 0\} \tag{3}$$

Где $C_A^{loc}(0,+\infty)$ - пространство абсолютно непрерывных функций на каждом компакте из $(0,+\infty)$.
В том частном случае, когда $K(x,t,\tau)=K_0(x-t)\tau$, где

$0\leq K_0\in L_1(-\infty,+\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_0(\tau)\,d\tau=\lambda^2$, уравнение (1)

исследовалось в работах [1-2].
В настоящей работе доказываются следующие результаты:
<u>Теорема 1.</u> Пусть выполнены следующие условия:

1) $y_0>0$ и существует число $\eta\geq y_0$ такое,

что $\int\limits_0^{\infty}K(x,t,\eta)\,dt\leq\lambda^2\eta,\ x>0$

2) $0\leq K\in C(D_\eta)$, где $D_\eta\equiv R^+\times R^+\times[0,\eta]$

3) $K(x,t,\tau)\uparrow$ по τ на $[0,\eta]$, т.е., если $\tau_1,\tau_2\in[0,\eta]$ и $\tau_1>\tau_2$, то

$$K(x,t,\tau_1)\geq K(x,t,\tau_2),\ (x,t)\in R^+\times R^+.$$

Тогда задача (1)-(3) в пространстве Соболева $W_\infty^2(0,+\infty)$ имеет положительное решение вида

$y(x)=y_0e^{-\lambda x}+\int\limits_0^{x}e^{-\lambda(x-t)}\varphi(t)\,dt$, где $0\leq\varphi\in W_\infty^1(0,+\infty)$.

<u>Теорема 2.</u> Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $y_0=0$ и существует число $\eta>0$ такое, что

$$\int\limits_0^{\infty}K(x,t,\eta)\,dt=\lambda^2\eta,$$

2) $0\leq K\in C(D_\eta)$ и $K(x,t,\tau)\uparrow$ по τ на $[0,\eta]$,

3) существует измеримая и неотрицательная функция $K^*\in L_1(-\infty,+\infty)$,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^*(\tau)\,d\tau=\lambda^2$, $\nu(K^*)\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}xK^*(x)\,dx<0$ такая,

что $K(x,t,\tau)\geq K^*(x-t)\tau$, $(x,t,\tau)\in(D_\eta)$

Тогда задача (1)-(3) имеет неотрицательное, нетривиальное решение в пространстве Соболева $W_\infty^2(0,+\infty)$ вида $y(x)=\int_0^x e^{-\lambda(x-t)} f(t)dt$, где $0 \le f \in W_\infty^1(0,+\infty)$.

Более того $\lim_{x\to\infty} y(x)=\eta$.

Ниже приведем несколько примеров:

1) $K(x,t,\tau)=K^*(x-t)G(\tau)$, где $0 \le G \in C[0,\eta]$, $G(x)\ge x,\ x\in[0,\eta]$, G$\uparrow$ на $[0,\eta]$, $G(\eta)=\eta$

2) $K(x,t,\tau)=K^*(x-t)\lambda^*(x)G(\tau)$, где λ^* - измеримая функция, удовлетворяющая следующему двойному неравенству

$$1 \le \lambda^*(x) \le \frac{\lambda^2}{\int_{-\infty}^{x} K^*(\tau)d\tau}.$$

В приложениях часто встречаются следующие виды функции G:

a) $G(x)=x+\sin x,\ x>0$; b) $G(x)=\eta e^{\frac{x}{\eta}-1}$; c) $G(x)=\sqrt{x}$.

1. N. B. Yengibaryan, A. Kh. Khachatryan. Mat. Sbornik, 198 (3), 839-855, (2007).
2. A. Kh. Khachatryan. Journal of Contemp. Math. Analysis 43(5), 305-316, (2008)

RESTRICTION OF $H_\alpha^p(R_{22})$ CLASSES TO THE BIDISC

A.H. KARAPETYAN

armankar2005@rambler.ru

Denote by R_{22} (unit matrix disc) the set of all complex 2x2-matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, for which $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} > 0$. Note that the restriction of this domain to the complex hyperplane $\left\{ b = 0,\ c = 0 \right\}$ gives the unit bidisc $\left\{ |a| < 1,\ |d| < 1 \right\}$.

For p > 0, α ≥ 0 denote by $H_\alpha^p(R_{22})$ the space of all holomorphic functions $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisfying the condition

$$\int\limits_{R_{22}} \left| f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|^p \cdot \left[\det\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \right\} \right]^\alpha dm_{22} < +\infty .$$

We establish that the restriction of any function $f \in H_\alpha^p(R_{22})$ to the unit bidisc $\left\{ |a| < 1,\ |d| < 1 \right\}$, i.e. the function $f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, belongs to certain weighted class in the unit bidisc.

О почти гипоэллиптических уравнениях

В.Г.Карапетян

Пусть N_0^n - множество n-мерных мультииндексов, т.е. точек _ = (_1, . . . , _n) с целыми не отрицательными компонентами, $E_n(R_n)$ n-мерное вещественное евклидово пространство точек x = (x1, . . . , xn) (_ = (_1 . . . , _n)), C_{n0}
=
RnЧiRn (i2 = −1). Для _ 2 Rn и _ 2 Nn
0 обозначим |_| =

p
_2
1 + . . . + _2n
|_| =
_1 + . . . + _n и D_ = D_1
1 · · ·D_n
n , где Dj =
@
@_j
либо Dj =
1
i
@
@xj
j =
1, . . . , n.
Л.Хермандером в [1] доказано, что все решения U 2 D0() (
_ En
область, D0-пространство обобщенных функций)
уравнения P(D)U = 0
являются бесконечно дифференцируемыми функциями
тогда и только
тогда, когда выполняется одно из следующих
эквивалентных условий:
1. P(_)(_)/P(_) _ D_P(_)/P(_) ! 0 при |_| ! 1, |_| 6= 0
2. dP (_) ! 1 при |_| ! 1,
где dP (_) расстояние точки _ 2 Rn от поверхности {_, _ 2
Cn; P(_) = 0}.
Такие операторы называются гипоэллиптическими.
В.И.Буренковым в [2] найдены необходимые и
достаточные условия
типа 1) для того, чтобы все те решения уравнения P(D)U =
0 (рас-

сматриваемого в бесконечном цилиндре), которые определенным обра-
зом стремятся к нулю на бесконечности были бы бесконечно дифферен-
цируемыми функциями.
Возникает естественный вопрос: что можно сказать о решениях U 2 D_0 уравнения P(D)U = f, когда символ P(_) оператора P(D) удовлетво-
ряет более слабому условию, чем условия 1) или 2), а именно:
1') |P_(_)|/(1 + |P(_)|) _ const 8_ 2 R_n; |_| 6= 0
2') d_P (_) _ const > 0 при достаточно больших _ 2 R_n.
Такие операторы (см. [3]) называется почти гипоэллиптиескими.
Доказаны следующие результаты.
Теорема 1. Оператор P(D) гипоэллиптичен тогда и толко тогда, когда
для любого _ > 0
N(P, _) _ {U; Ue−_(x)2L2(En) (D_P(D)UE−_(x) 2 $L_2(E_n)$, 8_} _
_ $W_{1\_}$ _ {U; (D_U)E−_(x) 2 $L_2(E_n)$, 8_}.
1
Теорема 2. Если для некоторого _ > 0 N(P, _) _ $W_{1\_}$, то оператор
P(D) почти гипоэллиптичен.
Теорема 3. Если оператор P(D) почти гипоэллиптичен и |P(_)| ! 1 при |_| ! 1, то существует число $\_P$ > 0 такое, что при всех _ 2 (0,$\_P$) N(P, _) _ $W_{1\_}$.

Список литературы

[1] Hermander L. - "The analysis of linear partial di_erential operators",
Vol.2, Springer-Verlag, 1983
[2] Буренков В.И. - "Аналог теоремы Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю в бесконечности", Сборник

докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, стр. 63-67, 1982.
[3] Kazaryan G.G. - "On almost hypoelliptic polynomials", Reports of
Russian Academy of Science, Vol. 398, n.6, pp.701-703, 2004
2

Об одной задаче типа Дирихле для неправильно эллиптического уравнения третьего порядка в L^1.

Г.М.Айрапетян

1. Пусть B_1 – класс трижды непрерывно дифференцируемых функций в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости z, удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{\partial^{p+q} u}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}\right| < A|z|^N, \quad \operatorname{Im} z > y_0 > 0, \quad p \geq 0, \ q \geq 0, \quad p+q \leq 2,$$

где A – постоянная зависящая от y_0, а N – натуральное число зависящее от u, Скажем, что функция $\rho_0(x)$ медленно меняющаяся в бесконечно удаленной точке справа, если

$$\rho_0(x) = \exp\left(g_1(x) + \int_{A_0}^{x} \frac{g_2(t)}{t} dt\right),$$

где $g_1(x)$ – ограниченная измеримая функция на $[A_0 + \infty)$, а $g_2(x)$ – непрерывная функция на $[A_0 + \infty)$, такая что $g_2(x) \to 0$, при $x \to \infty$. Аналогично определяется медленно меняющаяся функция в бесконечности слева.

В верхней полуплоскости Π^+ рассматривается следующая граничная задача:

определить решение u уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial \bar{z}^2} = 0, \; z = x + iy \in \Pi^+, \tag{1}$$

так чтобы выполнялись граничные условия

$$\lim_{y \to +0} \left\| u(x,y) - f_0(x) \right\|_{L^1(\rho_0)} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to +0} \left\| \operatorname{Re} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - f_1(x) \right\|_{L^1(\rho_0)} = 0, \tag{3}$$

где $\rho_0(x)$ медленно меняющаяся весовая функция в бесконечности слева и справа, $f_0(x)$, $f_0'(x)$, $f_1(x) \in L^1$.

Теорема 2.7. Пусть $\rho_0(x)$ – медленно меняющаяся функция в бесконечности справа и слева. Для того чтобы граничная задача (1)-(3) имела решение необходимо и достаточно, чтобы функция $\rho_0(x)$ удовлетворяла условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\rho}(x)}{1+|x|} dx < \infty .$$

ФСЗ и теоремы единственности в обратных задачах

Т. Н. Арутюнян (ЕГУ)

hartigr@yahoo.co.uk

Понятие функции собственных значений (ФСЗ) для семейств операторов Дирака и Штурма-Лиувилля было введено автором в работах [1], [2], [3].

Если собственные значения (с.з.) задачи Штурма-Лиувилля $L(q,\alpha,\beta)$ ($q \in L^1_R[0,\pi]$) $-y'' + q(x)y = \mu y$,

$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0,$

пронумерованные согласно возрастанию индекса, обозначим через $\mu_k(\alpha,\beta)$, $k=0,1,2,...$, то ФСЗ семейства задач $\{L(q,\alpha,\beta),\alpha\in(0,\pi],\beta\in[0,\pi)\}$ будем называть функцию $\mu(\gamma,\delta)$, определенную на $(0,\infty)\times(-\infty,\pi)$ по формуле $(\gamma=\alpha+\pi n,\ \delta=\beta-\pi m,\ n,m=0,1,2,...)$:

$$\mu(\gamma,\delta)=\mu(\alpha+\pi n,\ \beta-\pi m)=\mu_{n+m}(\alpha,\ \beta).$$

Классические теоремы единственности в обратной задаче Штурма-Лиувилля говорят об однозначном определении тройки (q,α,β) по некоторому набору спектральных данных, например, по множеству с.з. и так называемых нормировочных постоянных a_n, т.е. по набору $\{\mu_n,\ a_n;\ n=0,1,2,...\}$ (теорема единственности В. А. Марченко). В терминах ФСЗ эта теорема единственности эквивалентна задаче однозначного определения функции $\mu(\cdot,\cdot)$ по паре последовательностей

$$\left\{\mu(\alpha+\pi k,\ \beta),\ \frac{\partial\mu(\alpha+\pi k,\ \beta)}{\partial\gamma};\ k=0,1,2,...\right\},$$ где (α,β) какая-либо точка из $(0,\pi]\times[0,\pi)$. Возможны и другие постановки обратных задач и их эквивалентные постановки в терминах ФСЗ. Например, задача $L(q,\alpha,\beta)$ однозначно определяется последовательностью $\{\mu(\gamma_k,\ \beta),\ k=1,2,...\}$, где

γ_k некоторая сходящаяся последовательность положительных чисел.

Аналогичные утверждения доказываются и для системы канонических уравнений Дирака, которые обобщают, в частности, результаты, полученные в [4].

Литература

[1]. Т. Н. Арутюнян. Функция собственных значений и теорема единственности в обратной задаче для оператора Дирака с дискретным спектром. Изв. АН Армении. Математика, т. XXV, ¨5, 1990, стр. 495-501.

[2]. Т. Н. Арутюнян. Функция собственных значений семейства оператора Дирака. Изв. НАН Армении. Математика, т. XXXI, ¨6, 1996, стр. 5-14.

[3]. Т. Н. Арутюнян, Э. Р. Навасардян. Функция собственных значений семейства оператора Штурма-Лиувилля. Изв. НАН Армении. Математика, т. 35, ¨5, 2000, стр. 5-15.

[4]. Т. Н. Арутюнян. К обратной задаче для канонической системы Дирака. Изв. НАН Армении. Математика, т. 41, ¨1, 2006, стр. 5-14.

О единственности голоморфных и ограниченных вне сектора функций, представленных лакунарными степенными рядами

В.А. Мартиросян (ЕГУ)

В докладе предполагается изложить новые результаты о существовании нетривиальных голоморфных и ограниченных вне заданного сектора функций, имеющих лакунарные степенные ряды в окрестности бесконечности. Аналогичные результаты (необходимо достаточного характера) для степенных рядов с вещественными коэффициентами выражаются через перемены знаков их коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян В.А., Целые функции ограниченные на замкнутом угле и представимые степенными рядами с лакунами или с вещественными коэффициентами, Доклады АН СССР, **289**, N6, (1986), 1301-1304.
2. Freick L., Martirosian V.A., Müller J., On the existence of lacunary power series analytically continuable and bounded outside sectors, Complex Variable and Elliptic Eguations (Subm. publication), 2008.

РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С ГАРМОНИЧЕСКОЙ КРИВИЗНОЙ

В.А. Мирзоян

Государственный Инженерный Университет Армении

Риманово многообразие M называется риччи-полусимметрическим, если его тензор Риччи R_1 удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1 = 0$, т.е. является полупараллельным. Автором было доказано, что риманово многообразие является риччи-полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно или двумерно, или эйнштейново, или полуэйнштейново, или же является прямым произведением таких многообразий.

Риманово многообразие M называется многообразием с гармонической кривизной, если его тензор Риччи R_1 удовлетворяет условию

$$(\nabla_X R_1)(Y) = (\nabla_Y R_1)(X),$$

где ∇-риманова связность, а X, Y –произвольные касательные векторные поля на M.

Цель настоящей работы – исследование римановых риччи-полусимметрических многообразий с гармонической кривизной. Отметим, что если R_{ij} – компоненты тензора R_1 в некотором ортонормированном репере, то условия риччи-полусимметричности и гармоничности кривизны в совокупности равносильны тому, что выражение $\nabla_k \nabla_l R_{ij}$ симметрично по всем индексам.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть M – риманово риччи-плусимметрическое многообразие с гармонической кривизной. Тогда

$$\frac{1}{2}\Delta\left|R_1\right|^2 = \left(\nabla_k R_{ij}\right)\left(\nabla^k R^{ij}\right)$$

где Δ-оператор Лапласа, а $\left|R_1\right|^2$-квадрат длины тензора Риччи R_1.

Следствие. На римановом риччи-плусимметрическом многообразии с гармонической кривизной следующие условия эквивалентны:

а) длина тензора Риччи $\left|R_1\right|$ постоянна,

б) тензор R_1 является параллельным.

Теорема 2. Тензор Риччи компактного риччи-полусимметрического многообразия с гармонической кривизной является параллельным.

Теорема 3. Полуэйнштейново многообразие с гармонической кривизной локально является прямым произведением локально евклидова многообразия и эйнштейнова многообразия с ненулевым тензором Риччи.

Теорема 4. Римановo риччи-полусимметрическое многообразие с гармонической кривизной является или локально евклидовым, или эйнштейновым, или двумерным многообразием с гармонической кривизной, или произведением таких многообразий.

Մեկ ապերիոդիկ անվերջ հաջորդականության բառերի երկարությունների հաշվումը

Ն.Վ.Շիրվանյան, Վ.Լ.Շիրվանյան

Դիցուք F-ը ազատ խումբ է, որոշված խմբային այբուբենում՝

$$\{a,b,a^{-1},b^{-1}\} \quad (1)$$

(1)-ում կառուցվել է բառերի անվերջ հաջորդականություն՝

$$x_1=a^{-1}ba,\ x_{i+1}=x_ibx_i^{-1} \qquad (i=2,3,\ldots) \qquad (2)$$

որոնք չեն պարունակում դատարկ բառերի քառակուսիներ, այսինքն EE տեսքի բառ, որտեղ E դատարկ բառ չէ:

<u>Սահմանում 1.</u>Y բառի երկարություն կոչվում է նրա մեջ մասնակցող տառերի քանա կը :Երկարությունը կնշանակենք $\partial(y)$ -ով:

Թեորեմա 1. F ազատ խմբում (2) հաջորդականության X_i բառերի երկարությունները տրվում են բանաձևով:

$$\partial(x_i)=2^{i+1}-1$$

Սահմանում 2. $b_i=\partial(x_{i+1})-\partial(x_i) \quad (i=1,2,\ldots)$

Հետևանք 1. $b_1,b_2,\ldots.$ թվերի հաջորդականությունը կազմում է երկրաչափական պրոգրեսիա $q=2$ հայտարարով և $b_1=4$:

Թեորեմա 2. Ցանկացած $K\in N$ բնական թվի համար F ազատ խմբում տեղի ունի

$$\partial(x_i^k)=2^{i+1}+k-2$$

Սահմանում 3. $b_i^{(k)}=\partial(x_{i+1}^k)-\partial(x_i^k) \quad i=1,2,\ldots \quad K\in N$:

Հետևանք 2. $\partial(x_i^k)$ $(i=1,2,\ldots)$ ցանկացած հաջորդականության համար (սևեռված k-ի դեպքում) համապատասխան (6) հաջորդականությունը համնկնում է b_i` (4) հաջորդա կանության հետ,այսինքն`

$$b_i^{(k)}=b_i \tag{7}$$

Հետևանք 3. $\partial(x_i),\ \partial(x_i^2),\ldots\partial(x_i^k),\ldots$ (8)

ցանկացած հաջորդականություն,սևեռված $i\notin N$ դեպքում,կազմում է թվաբանական պրոգրեսիա $d=1$ տարբերությամբ:

Հաշվի առնելով,որ քոմփյութերում թվերը գրվում են 2-ական համակարգում, ըստ (3) բանաձևի կարող ենք գրել`

$$\partial(x_i)=\overbrace{11\ldots\ldots\ldots\ldots1}^{i+1} \qquad (9)$$

Գրականություն

В.Л.Ширванян Вложение группы B(∞,n) в группу B(2,n)

Изв.АНСССР сер.мат.(1976).40.N1

О функциях, полуаналитических в бидиске

А. И. Петросян (ЕГУ)

Пусть $U^2=\{z=(z_1,z_2)\in\mathrm{C}^2: |z_i|<1,\ i=1,2\}$- единичный бидиск в пространстве C^2,
$T^2=\{z=(z_1,z_2)\in\mathrm{C}^2: |z_i|=1,\ i=1,2\}$- его остов. Функция $u(z_1,z_2)=u(x_1+iy_1,x_2+iy_2)$ класса C^2, определенная в U^2, называется бигармонической в U^2, если в каждой точке она удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\equiv 0, \qquad k=1,2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1\partial y_2}\equiv 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial y_1}\equiv 0. \qquad (2)$$

Если же выполняются лишь условия (1), (что означает гармоничность по каждой переменной $z_k, k=1,2$) то функция $u(z_1,z_2)$ называется двоякогармонической. Как известно, функция бигармонична тогда и только тогда, когда она является вещественной частью голоморфной функции. Класс бигармонических функций узок в том смысле, что проблема Дирихле в этом классе не всегда разрешима; это затрудняет распространение некоторых одномерных результатов на многомерный случай.

Бергман [1] ввел класс функций (extended class of complex functions), вещественными частями которых служат двоякогармонические функции. Этот класс можно изучать методами теории потенциалов, т.к. во множестве двоякогармонических функций проблема Дирихле при заданной на остове функции всегда разрешима. Однако не всякая голоморфная функция принадлежит этому классу.

В работе [2] вводится видоизмененный вариант класса Бергмана (полуаналитические функции), который имеет преимущество: в том частном случае, когда вещественная часть полуаналитической функции бигармонична, сама функция аналитична. Тем самым, всякая аналитическая функция является также и полуаналитической.

Для полуаналитических функций получены двумерные аналоги интегрального представления Шварца а также теоремы Герглотца.

Литература

1. S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, Mathematical Surveys, Amer. Math. Soc., 1970, pp. 214–218.

2. A. I. Petrosyan, *About functions in the unit bidisc semianalytical in sense of Bergman*,
Mathematics in higher school, Yerevan, 2007, vol. 3, no. 2, pp. 37–43.

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆԻ ՖԱԿՏՈՐԻԶԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐՋԻՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄՆԵՐՆ ՈՒ ՖԱԿՏՈՐԻԶԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա. Մ. Ջրբաշյան

Մ. Մ. Ջրբաշյանի վաղ՝ 1945-1947թթ. աշխատանքը, որ ուժեղացնում է Նևանլիննայի արդյունքը միավոր շրջանում մերոմորֆ, կշռով ինտեգրելի բնութագրիչ ունեցող ֆունկցիաների մասին, ինչպես նաև տալիս է միավոր շրջանում հոլոմորֆ ու ամբողջ ֆունկցիաների որոշ կշռային, բանախյան տարածությունների հիմնական անալիտիկական ապարատը՝ ներկայացումները, հետագա տարիներին Երևանում շարունակվել է Մ. Մ. Ջրբաշյանի – Վ. Ս. Զաքարյանի ֆակտորիզացիայի ու եզրային արժեքների տեսությամբ: Այդ տեսությունը ժամանակին, առաջին անգամ լայն, միջազգային ճանաչում է բերել Հայաստանի մաթեմատիկական դպրոցին, ինչը մասնավորաբար արտահայտվել է 1965թ. հայտնի Երևանյան միջազգային գիտաժողովով, որին մասնակցել են ժամանակի համարյա բոլոր դասականները՝ Ռոլֆ Նևանլիննայի գլխավորությամբ: Այնինչ միավոր շրջանում հոլոմորֆ ու ամբողջ ֆունկցիաների կշռային, բանախյան տարածությունների տեսության հետագա զարգացումը՝ հենված Մ. Մ. Ջրբաշյանի ներկայացումների վրա, մինչ վերջին տարիներս հիմնականում տեղի է ունեցալ արևմուտքում, ուր այդ տարածությունները հանիրավի վերագրվել են ոմն Սեմյուել Բերգմանի:

Զեկույցը մանրամասն անդրադառնում է վերջին տասնամյակներում Մ. Մ. Ջրբաշյանի տեսությունների ժամանակակից զարգացումներին նշված երկու ուղղություններով, դրա կիրառությանը Մ. Գ. Կրեյնի մի պրոբլեմի լուծման մեջ, ինչպես նաև տեսության հետագա անցմանը, հոլոմորֆ, հարմոնիկ, սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների կշռային դասերի տեսությանը միավոր շրջանում: Բացի այդ նկարագրվում են նմանօրինակ տեսության կառուցմումը կիսահարթության մեջ, դրա կիրառությունները: Ակնարկ է տրվում միավոր շրջանի մակերեսով, բազմաշրջանի ու գնդի ծավալով, կշռով հանրագումարելի ռեգուլյար ֆունկցիաների տարածություններում գործող որոշ օպերատորներին վերաբերող արդյունքների մասին:

ՈՒՆԻՏԱՐ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ԼԻԱԿԱՏԱՐ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ $A_\omega^2(C)$ ԴԱՍԵՐՈՒՄ

Ս. Գ. Ռաֆայելյան, Ա. Մ. Ջրբաշյան

Զեկույցում տրվում է ունիտար օպերատորների լիակատար նկարագրություն Ա. Մ. Ջրբաշյանի ներմուծած ամբողջ ֆունկցիաների ընդհանուր $A_\omega^2(C)$ հիլբերտյան տարածություններում, որոնք սպառում են բոլոր ամբողջ ֆունկցիաները: $A_\omega^2(C)$ տարածությունները սահմանված են

$$\|f\|_\omega^2 = \iint_C |f(z)|^2 d\mu_\omega(z) < +\infty$$

պայմանով, ուր $d\mu_\omega(re^{i\theta}) = -2\pi d\vartheta d\omega(r^2)$, իսկ $\omega(x)$–ը ենթադրվում է խիստ նվազող ֆունկցիա $[0,+\infty)$ կիսառանցքի վրա, այնպիսին, որ

$$\Delta_n^\infty(\omega) = -\int_0^{+\infty} t^n d\omega(t) < +\infty, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Ստորև տրված հիմնական արդյունքը ցույց է տալիս, որ $A_\omega^2(C)$ տարածություններում գործող ունիտար օպերատորներն իրենց կառուցվածքով մոտ են $L_\omega^2(C) \to A_\omega^2(C)$ պրոեկտորին, որը տրվում է

$$f(z) = \iint_C f(z) C_\omega(z\bar{\varsigma}) d\mu_\omega(\varsigma), \qquad z \in C,$$

բանաձևով, ուր

$$C_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k^\infty(\xi)}$$

Մ. Մ. Ջրբաշյանի ω–կորիզն է ողջ վերջավոր կոմպլեքս հարթության համար:

Թեորեմ 1. *Եթե U -ն ունիտար օպերատոր է $A_\omega^2(C)$ տարածության մեջ, ապա գոյություն ունի $K(z,\varsigma)$ ֆունկցիա, որը $A_\omega^2(C)$ տարածությունից է երկու՝ z և $\bar{\varsigma}$ փոփոխականներով ու բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

$$K(z,\varsigma) = \overline{K(\bar{z},\bar{\varsigma})}, \qquad z,\varsigma \in C, \tag{1}$$

$$C_\omega(\varsigma_1\overline{\varsigma_2}) = \iint_C K(z,\varsigma_2)\overline{K(z,\varsigma_1)}d\mu_\omega(\varsigma), \qquad \varsigma_1,\varsigma_2 \in C: \tag{2}$$

Այս կորիզով $g = Uf$ *և* $f = U^{-1}g$ *համասարությունները գրվում են հետևյալ կերպ.*

$$g(z) = \iint_C f(\varsigma)\overline{K(\varsigma,z)}d\mu_\omega(\varsigma), \qquad z \in C, \tag{3}$$

$$f(z) = \iint_C g(\varsigma)K(z,\varsigma)\,d\mu_\omega(\varsigma), \qquad z \in C: \tag{4}$$

Հակառակը, եթե $K(z,\varsigma)$ որևէ *ֆունկցիա է, որը* $A_\omega^2(C)$ *տարածությունից է երկու՝* z *և* $\overline{\varsigma}$ *փոփոխականներով ու բավարարված են (1), (2) պայմանները, ապա (3) ու (4) բանաձևերը համապատասխանաբար ներկայացնում են* $A_\omega^2(C)$ *տարածությունում գործող ունիտար օպերատոր ու դրա հակադարձը:*

А. ПАЙЛЕВАНЯН

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА ГРУПП $B(m,n)$, ПРИ $m \geq 2$ И ДОСТАТОЧНО БОЛЬШОМ n.

“Пусть n достаточно большое нечетное число. Описать автоморфизмы свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ периода n с m порождающими.” Это - задача №8.53.а), поставленная А.Ю.Ольшанским в коуровской тетради [1] в1982 году. Лишь недавно Е.А.Черепановым опубликованы две работы [2-3], посвященные изучению групп автоморфизмов свободных бернсайдовых групп $B(m,n)$. В работе [2] описны нормальные автоморфизмы групп $B(m,n)$ при нечетных $n > 10^{10}$ и $m \geq 2$. В работе [3] Е.А.Черепановым показано существование автоморфизма бесконечного порядка в группе $Aut(B(m,n))$.

Нами построены новые автоморфизмы бесконечного прядка в группе $Aut(B(m,n))$. Рассмотрим свободную группу $B(2,n)$ с базисом a,b и два автоморфизма, задаваемые следующим образом: $\phi : a \mapsto b,\ \phi : b \mapsto a^2 b,\ \ \psi : a \mapsto ab^2,\ \ \psi : b \mapsto ab^3$.

Справедлива следующая

Теорема. *Автоморфизмы* ϕ *и* ψ *имеют бесконечный порядок в* $Aut(B(2,n))$.

Определим автоморфизмы $\overline{\phi}$ и $\overline{\psi}$ следующим образом: $\overline{\phi}(a_1) = \phi(a_1), \overline{\phi}(a_2) = \phi(a_2), \quad \overline{\phi}(a_i) = id(a_i),\ 3 \leq i \leq m$, $\overline{\psi}(a_1) = \psi(a_1), \overline{\psi}(a_2) = \psi(a_2),\ \overline{\psi}(a_i) = id(a_i),\ 3 \leq i \leq m$.

Следствие. Автоморфизмы $\overline{\phi}$ и $\overline{\psi}$ имеют бесконечный порядок в $Aut(B(m,n))$.

Доказательство опирается на работы [4-6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск, 2006.
2. Cherepanov E. A. *Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents*. *Internat.* J. Algebra Comput. **16**:5, (2006), 839—847.
3. Cherepanov E.A. *Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group*, Communications in Algebra, **33**:2, (2005), 539-547.
4. Olshanskii A. Yu. *On the Novikov-Adian theorem*. Math. Sb. **118**, 203-235.
5. Адян С.И**.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
6. Lysënok, I. G. *Infinite Burnside groups of even period.* Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **60:**3**,** (1996), 3—224.

О явном решении одного типа дифференциальных уравнений

А.Г. Камалян, В.В. Симонян

Рассматривается дифференциальное уравнение с комплексной независимой переменной вида

$$\gamma e^{-cz} P_1(D)w(z) + P_2(D)w(z) = 0,$$

где

$$P_1(D)w(z) = \left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dz} - \lambda_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dz} - \lambda_N\right)w(z)$$

$$P_2(D)w(z) = \left(\frac{d}{dz} - \mu_1\right)\left(\frac{d}{dz} - \mu_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dz} - \mu_N\right)w(z),$$

$N \in \mathrm{N}$, $c, \gamma \in \mathrm{C}$, $\lambda_j, \mu_j \in \mathrm{C}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$.

Пусть $a_j = \dfrac{\lambda_j}{c}, b_j = \dfrac{\mu_j}{c}$ $(j = 1,2,\ldots,N)$, m и M ненулевые вещественные числа удовлетворяющие неравенствам

$$\max_{j=1,\ldots,N}\{\operatorname{Im}a_j, \operatorname{Im}b_j\} < M, \quad m < \min_{j=1,\ldots,N}\{\operatorname{Im}a_j, \operatorname{Im}b_j\}.$$

Предположим, что множества $A = \{a_j + n; j = 1,2,\ldots,N; n = 0,1,2,\ldots\}$ и $B = \{b_j - n; j = 1,2,\ldots,N; n = 0,1,2,\ldots\}$ не пересекаются.

Пусть $L_{M\pm} = \{\pm a + iM; a \geq 1\}$, $L_{m\pm} = \{\pm a + im; a \geq 1\}$, а $L_0^{\pm}$ некоторый контур соединяющий точки $im \pm 1$ и $iM \pm 1$ таким образом, что контуры L_+ состоящий из L_{m+}, L_0^+, L_{M+} и L_- состоящие из L_{m-}, L_0^-, L_{M-} разделяют множства A и B.

Рассмотрим функции $w_j^+(z)$ и $w_j^-(z)$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ определенные соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re}c\operatorname{Re}z - \operatorname{Im}c\operatorname{Im}z - \ln|\gamma| < 0$ и $\operatorname{Re}c\operatorname{Re}z - \operatorname{Im}c\operatorname{Im}z - \ln|\gamma| > 0$ с помощью формулы

$$w_j^{\pm}(z) = \int_{L_\pm} u^s(z) e^{2\pi i(j-1)s} \prod_{l=1}^{N}\Gamma(a_l - s)\prod_{l=1}^{N}\Gamma(s - b_l)ds,$$

где $u(z) = (-1)^{N-1}\gamma^{-1}e^{cz}$.

Справедлива следующая теорема

Теорема *Для* $z \in \mathrm{C}$ *удовлетворяющих условию* $\operatorname{Re}c\operatorname{Re}z - \operatorname{Im}c\operatorname{Im}z - \ln|\gamma| < 0$ *функции* $w_j^+(z)$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ *составляют фундаментальную систему решений уравнения (1).*

Для $z \in \mathrm{C}$ *удовлетворяющих условию* $\operatorname{Re}c\operatorname{Re}z - \operatorname{Im}c\operatorname{Im}z - \ln|\gamma| > 0$ *функции* $w_j^-(z)$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ *составляют фундаментальную систему решений уравнения (1).*

PATTERN RECOGNITION BY CHORD LENGTH DISTRIBUTIONS

Victor K. Ohanyan
Yerevan State University
E-mail: victo@aua.am

In the last century the German mathematician W. Blaschke formulated a problem on the investigation of bounded convex domains in the plane by means of probabilistic methods. In particular, recognition of planar domains **D** by means of random lines intersecting **D**. Random lines generate chords of random length in convex domains. The corresponding distribution function is called the *chord length distribution function* that we denote by F(y) (see [1]). In the initial stage of investigation mathematicians tried to find explicit expressions of the chord length distribution (or density) functions for concrete domains **D** in the terms of elementary functions. Till recently explicit expressions for the chord length distribution functions have been known in the case where **D** is a disc, a regular triangle [2] and a rectangle [3]. Using delta-formalism in classical Pleijel identity we obtained explicit expressions for a regular pentagon (see [4]) and a regular hexagon (see [5]). One can proved (see [4]) that chord length distribution function for any domain **D** is continuous, while the corresponding density function is discontinuous and the discontinuity points of the density function are the values of argument that coincide with the lengths of the sides, heights and diagonals of the polygon **D** (see [4] and [6]). In the last years have been introduced the notion of orientation-dependent chord length distribution function $F(\varphi, y)$), while F(y) is called mixed orientation. These questions are connected with

Covariogram Problem: Does the covariogram determine a convex domain, among all convex domains, up to translations and reflections? (see [8]). G. Matheron in 1986 conjectured a positive answer for this problem. In fact, the covariogram problem is equivalent to the problem of determining a convex domain from all its orientation-dependent chord length distributions (see [8]). Nagel [7] has proved that oriented-dependent chord length distribution function uniquely specifies **D** in the class of all polygons in the plane. In the paper [8] the analogue of the result by Nagel for any bounded convex domain have been obtained .

REFERENCES

1. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.

2. R. Sulanke,``Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren'', Math. Nachr., vol. 23, pp. 51-74, 1961.

3. W. Gille, ``The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases'', Exp. Techn. Phys., vol. 36, pp. 197-208, 1988.

4. N. G. Aharonyan and V. K. Ohanyan , ``Chord length distributions for polygons", Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences), vol. 40, no. 4, pp. 43 - 56, 2005.

5. H. Harutyunyan, ``Chord length distribution function for a regular hexagon'', Uchenie Zapiski, Yerevan State University, vol. 1, pp. 17-24, 2007.

6. W. Gille, N. Aharonyan and H. Harutyunyan, ``The SAS structure of pentagonal and hexagonal rods", submitted in Journal Appl. Cryst. , 2008.

7. W. Nagel, ``Orientation-dependent chord lengths distributions characterize convex polygons", Jour. Appl. Prob., vol. 30, pp. 730-736, 1993.

8. G. Averkov and G. Bianchi,``Retrieving convex bodies from restricted covariogram functions'', Adv. Appl. Prob., (SGSA), vol. 39, pp. 613-629, 2007.

Բովանդակություն