Ծրագրային կոմիտե՝

Ն. Առաքելյան, Ա. Թալալյան, Գ. Գևորգյան, Հ. Ղազարյան, Վ. Օհանյան, Յու. Մովսիսյան, Տ. Հարությունյան

Կազմակերպչական կոմիտե՝

Վ. Աթաբեկյան, Վ. Արզումանյան, Ա. Բաբայան, Ռ. Բարխուդարյան, Լ. Գևորգյան, Ս. Դալալյան, Խ. Խաչատրյան, Գ. Հակոբյան, Հ. Հայրապետյան, Ս. Հարությունյան, Տ. Հարությունյան, Բ. Նահապետյան, Ա. Պետրոսյան, Ս. Ռաֆայելյան, Ա. Սահակյան

Program committee

N. Arakelyan, A. Talalyan, G. Gevorgyan, H. Ghazaryan, V. Ohanyan, Yu. Movsisyan, T. Harutyunyan

Organizing committee

V. Atabekyan, V. Arzumanyan, A. Babayan, R. Barkhudaryan, L. Gevorgyan, S. Dalalyan, Kh. Khachatryan, G. Hakobyan, H. Hayrapetyan, S. Harytyunyan, T.Harutyunyan, B. Nahapetyan, A. Petrosyan, S. Rafayelyan, A. Sahakyan

Բովանդակություն/Content

Изотопные полукольца

Л.Р. Абрамян

Арцахский госуниверситет
E-mail: liana_abrahamyan@mail.ru

Множество Q с операциями $+$ и $\cdot$ называется полукольцом, если:

1. $Q(+)$ коммутативная полугруппа с единицей 0:

   a $(a+b)+c=a+(b+c)$,

   b $0+a=a+0=a$,

   c $a+b=b+a$;

2. $Q(\cdot)$ полугруппа с единицей 1:

   2_1 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,

   2_2 $1\cdot a=a\cdot 1=a$;

3. умножение дистрибутивно относительно сложения:

   3_1 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,

   3_2 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$;

4. 0 свойство умножения на нуль: $0\cdot a=a\cdot 0=0$.

Примеры.

1) Множество натуральных чисел является полукольцом относительно операции умножения и сложения.

2) Множество матриц с элементами из полукольца натуральных чисел является полукольцом относительно операций матричного умножения и сложения.

3) Множество идеалов кольца является полукольцом относительно операций умножения и сложения идеалов.

4) Ограниченная и дистрибутивная решетка является полукольцом относительно решеточных операций.

5) Если $A(+)$ – коммутативный моноид, то множество эндоморфизмов $End(A)$ является полукольцом относительно следующих операций:
$$(f+g)x = f(x) + g(x),$$
$$(f \cdot g)x = g(f(x)).$$

Теорема. Если два полукольца изотопны, то они изоморфны.

Список литературы

[1] Ю. М. Мовсисян. *Введение в теорию алгебр со сверхтождествами*, Изд-во ЕГУ, Ереван, (1986).

Проблема Бернсайда о периодических группах (упрощенное доказательство)

С.И. Адян

Английский математик В. Бернсайд в 1902 году поставил вопрос о том, будет ли конечной всякая группа, имеющая m порождающих и удовлетворяющая тождеству периодичности $x^n = 1$. Этот вопрос впоследствии вызвал большой интерес среди алгебраистов и получил в мате- матике название «проблема Бернсайда о периодических группах», а максимальная группа с этим тождеством, которая задается в виде

$$B(m;n) = \langle a_1, a_2, \cdots, a_m \,| x^n = 1 \rangle; \qquad (1)$$

получила название свободной бернсайдовой группы периода n. Этой проблемой Бернсайда в течение многих десятилетий занимались видные алгебраисты многих стран. При этом был получен положительный ответ на вопрос Бернсайда только для периодов $n = 2; 3; 4$ и $n = 6$. Американский математик В.Магнус в 1950 году в работе [4] предложил рассматривать также связанный с этой проблемой вопрос, относящийся только к конечным периодическим группам данного периода. Он назвал этот вопрос "Restricted Burnside problem". В проблеме Магнуса требовалось ответить на вопрос, существует ли для данной пары чисел $(m; n)$ максимальная конечная периодическая группа периода n с m порождающими? Отрицательное решение проблемы Бернсайда было получено в 1968 году в совместной работе П.С.Новикова и автора [2]. В этой работе была доказана бесконечность бернсайдовых групп $B(m; n)$ при нечетных $n \geq 4381$, а значит, и для всех экспонент, кратных нечетным $n \geq 4381$. В 1975 году была опубликована монография автора [3], в которой этот результат был распространен на все нечетные $n \geq 665$ и было получено решение ряда других старых проблем теории групп с использованием созданной теории. В частности, было доказано, что при $n = 665$ и $m = 2$ число различных элементов группы $B(m; n)$, представимых в виде произведения k порождающих элементов, растет как экспонента $2,9^k$. Подробный обзор истории многочисленных исследований по проблемам В.Бернсайда и В.Магнуса, читатель может найти в статье автора [5] и в книге [6]. Доказательство бесконечности групп (1) основывается на классификации несократимых периодических слов в алфавите рассматриваемой группы по глубине залегания в них периодических подслов.

В настоящем докладе предлагается новое более доступное для читателя доказательство бесконечности свободных периодических групп

$B(m;n)$ нечетных периодов $n \geq 665$. Это новое доказательство было достаточно подробно изложено в спецкурсе, который автор прочитал на механико-математическом факультете МГУ имени Ломоносова в 2011/2012 учебном году. Текст полного доказательства готовится к печати и будет опубликован в журнале "Успехи математических наук". Характерной особенностью используемой нами теории является то, что в ней все основные утверждения, включая определения основных понятий, вводятся и доказываются совместной индукцией по натуральному параметру α, который называется рангом. Общая схема индукции по рангу α и доказательства ключевых лемм в новом доказательстве по существу остаются такими же как в книге [3]. Существенное изменение вносится в определения некоторых важных понятий: реальный поворот ранга α и активное ядро ранга α. Новым по сравнению с книгой [3] является также использование здесь циклических периодических слов при задании порождающих вхождений для элементарных слов ранга α. Важно отметить и тот факт, что новое доказательство позволяет более чем в 2 раза понизить полученную в [3] оценку $n \geq 665$, которая оставалась рекордной с 1975 года. Ключевым понятием рассматриваемой теории является понятие q-поворота данного вхождения элементарного слова ранга $\alpha \geq 1$ в данном приведенном слове ранга $\alpha - 1$. Повороты заменяют определяющие соотношения. В частности, q-поворот ранга 1 имеет вид $X = PA^tA_1Q \to P(A^{-1})^{n-t-1}A_2^{-1}Q = Y$, где $A = A_1A_2$ есть элементарный период ранга 1, а выделенные в несократимых словах X и Y вхождения периодических подслов с периодами A и A^{-1} содержат не менее q периодов и не продолжаемы относительно указанных периодов ни влево ни вправо.

[1] Burnside W., "On an unsettled question in the theory of discontinuous groups Quart. J. Pure Appl. Math., 33 (1902), 230–238.

[2] Новиков П. С., Адян С. И., "О бесконечных периодических группах Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1,2,3 (1968), 212–244, 251–524, 709–731.

[3] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, Наука, М., 1975.

[4] Magnus W., A connection between the Baker–Hausdorf formula and a problem of Burnside Ann. of Math. (2), 52 (1950), 111–126.

[5] Адян С. И., "Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы Успехи математических наук, 65:5 (2010), 5–59.

[6] Чандлер Б., Магнус В., Развитие комбинаторной теории групп, Мир, М., 1985.

Dynamic geometry of some polynomials

G.V. Aghekyan, K.P. Sahakyan

Department of Applied Mathematics and Informatics,
of Russian-Armenian (Slavonic) University.
E-mail: *gagik.aghekyan@gmail.com, karen_sahakyan@mail.ru*

In 1836, Gauss showed that all the roots of P', distinct from the multiple roots of the polynomial P itself, serve as the points of equilibrium for the field of forces created by identical particles placed at the roots of P (provided that r particles are located at the root of multiplicity r). The following equality to zeros provides a quick proof of Gauss-Lucas theorem (see for example [1] or [2]). Thus was appeared the branch of mathematics, which after the book of Morris Marden[3], was called Geometry of Polynomials. The polynomial conjectures of Sendov and Smale are two challenging problems of this branch[4,5,6].

One of the beautiful theorems of mathematics is Marden's theorem [3,7]. It gives a geometric relationship between the zeros of a third-degree polynomial with complex coefficients and the zeros of its derivative. A more general version of this theorem, due to Linfield [8].

This article focuses on the dynamic behavior of critical points in the case of moving one of the roots of cubic polynomial on a given trajectory. The equations of the curves, where the critical points moves, are obtained. Discovered new geometric properties of positions of the zeros and critical points of a complex polynomial of degree three. The case of multiple roots of the given polynomial is considered as well.

References

[1] Prasolov, V.V, Polynomials, *Springer*, 2000.
[2] Rahman, Q.I and Schmeisser, G., Analytic theory of polynomials, *Oxford Univ. Press*, 2005.
[3] Marden M, Geometry of Polinomials , AMS, 1966.
[4] Schmeisser, G., The conjectures of Sendov and Smale , *Approximation Theory (a volume dedicated to Blagovest Sendov),Sofia Darba,* 2002, pp 353-369.
[5] Smale S., The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bulletin of AMS 4(1981),* pp. 1-36.
[6] Sendov Bl., Generalization of a conjecture in the Geometry of Polynomials, Serdica Math. J. 28(2002), pp.283-304.

[7] Kalman, D., An Elementary Proof of Marden's Theorem, *The American Mathematical Monthly, vol.115, no. 4, 2008, pp. 330-338.*
[8] Linfield, B. Z., On the relation of the roots and poles of a rational function to the roots of its derivative, *Bulletin of the AMS,* 27(1920), pp. 17-21.

Mean distance between two points in a domain

N.G. Aharonyan and V.K. Ohanyan

Yerevan State University, Department of Mathematics and Mechanics [1]
E-mail: *victo@aua.a*

Let $\mathbf{D}$ be a bounded convex domain in the Euclidean plane $\mathbf{R}^2$ (with area $\|\mathbf{D}\|$ and perimeter $|\partial\mathbf{D}|$) and we choose uniformly and independently two points $\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_2$ from $\mathbf{D}$. How large is the mean distance $m(\mathbf{D})$ between these two points? In other words, we have to calculate the following quantity:

$$m(\mathbf{D}) = \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2} \int_{\mathbf{D}} \int_{\mathbf{D}} \rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)\, d\mathcal{P}_1\, d\mathcal{P}_2,$$

where $\rho(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ is the Euclidean distance between $\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_2$, $d\mathcal{P}$ is the 2-dimensional Lebesgue measure. Nowadays it is known explicit expressions for $m(\mathbf{D})$ only in three cases, where $\mathbf{D}$ is the disk $\mathbb{K}_r$ of a radius r:

$$m(\mathbb{K}_r) = \frac{128\, r}{45\, \pi}$$

for an equilateral triangle $\triangle_a$ of side a:

$$m(\triangle_a) = \frac{a}{5} + \frac{3\, a}{20} \ln 3$$

and for a rectangle $\mathbb{R}_{a,b}$ with sides $a \le b$:

$$m(\mathbb{R}_{a,b}) = \frac{1}{15} \left[\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2} + \sqrt{a^2+b^2} \left(3 - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{2} \left(\frac{b^2}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{b} + \frac{a^2}{b} \ln \frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{a} \right) \right]$$

(see [3] and [4]).

A formula for calculation of mean distance $m(\mathbf{D})$ by means of density function of the lenght of chord of $\mathbf{D}$ is obtained. This formula allows to find an explicit form of mean distance $m(\mathbf{D})$ for those $\mathbf{D}$ for which the chord lenght distribution is known (see [2] and [2]). In particular, using the formula, we derive explicit forms of $m(\mathbf{D})$ for a disc, a regular triangle, a rectangle, a regular pentagon and a regular hexagon.

[1] The investigation is done with partial support of the State Science Committee of Republic of Armenia, Grant 11-1A-125

References

[1] N. Aharonyan and V. Ohanyan, (2005), Chord length distribution functions for polygons. In *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences).* **40,** (no. 4), 43–56.

[2] Harutyunyan, H. and Ohanyan, V. (2009), Chord length distribution function for regular polygons, *Advances in Applied Probability* **41,** 358–366.

[3] Burgstaller, B. and Pillichshammer, F. (2009), The average distance between two points, *Bull. Aust. Math. Soc.* **80**, 353 - 359.

[4] Dunbar, S. R. (1997), The average distance between points in geometric figures, *College Math. J.* **28**, 187-197.

Homogenization of elliptic systems with oscillating Dirichlet data

H. Aleksanyan

Yerevan State University[1]
E-mail: *hayk.aleksanyan@gmail.com*

Let D be a bounded convex domain in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$, and Γ be its boundary. We study the asymptotic behavior of solutions to the following problem:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u_\varepsilon(x)) = 0, & \text{in } D, \\ u_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon), & \text{on } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

where $\epsilon > 0$ is a small parameter and $A(y) = (A_{ij}^{\alpha\beta}(y))$, $1 \leq \alpha, \beta \leq d$, $1 \leq i, j \leq N$ is a $\mathbb{R}^{N^2 \times d^2}$-valued function defined on $\mathbb{R}^d$. Using the summation convention for repeated indices the operator is defined as

$$\mathcal{L} := -\operatorname{div}\left[A(x)\nabla\right] = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right]. \tag{2}$$

We also consider the corresponding homogenized problem, namely

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u_0(x)) = 0, & \text{in } D, \\ u_0(x) = \overline{g}, & \text{on } \Gamma, \end{cases} \tag{3}$$

where $\overline{g} = \int\limits_{\mathbb{T}^d} g(x)dx$.

Under some assumptions on domain and operator we prove convergence results for solutions of the problem (1) to the solution of (3).

This is a joint work with Henrik Shahgholian, and Per Sjölin.

[1] This research was carried out during the author's stay at KTH, Stockholm. H. Aleksanyan thanks Göran Gustafsson foundation for visit appointment to KTH.

A solution of generalized cosine equation in Hilbert's fourth problem

R. Aramyan

Institute of Mathematics NAS RA, Russian-Armenian State University
E-mail: *rafikaramyan@yahoo.com*

The fourth problem in Hilbert's famous collection of 1900, asks for the geometries, defined axiomatically, in which there exists a notion of length for which line segments are the shortest connections of their endpoints. It was shown in [2] that it is the same to ask: *determine all complete, continuous and linearly additive metrics in* $\mathbf{R}^n$.
The modern approaches make it clear that the problem is at the basis of integral geometry, inverse problems and Finsler geometry.
We denote by $\mathbf{E}$ the space of planes in $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{S}^2$ the unit sphere. By $[x]$ we denote the bundle of planes containing the point $x \in \mathbf{R}^3$. Let μ be a locally finite signed measures μ in the space $\mathbf{E}$, which possess densities $h(e)$ with respect to the standard Euclidean motion invariant measure. To define function h_x on $\mathbf{S}^2$ we consider the restriction of h onto $[x]$ as a function on the hemisphere. Then we extend the restriction to $\mathbf{S}^2$ by symmetry. A.V.Pogorelov showed the following result.

Theorem 1. *If H is a smooth linearly additive Finsler metric in $\mathbf{R}^3$, then there exists a uniquely determined locally finite signed measure μ in the space $\mathbf{E}$, with continuous density function h, such that*

$$H(x,\Omega) = \int_{\mathbf{S}^2} |(\Omega,\xi)|\, h_x(\xi)\, d\xi \quad \text{for} \quad (x,\Omega) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2. \tag{1}$$

Here h_x is the restriction of h onto $[x]$, $d\xi$ denotes the spherical Lebesgue measure on $\mathbf{S}^2$.

The measure μ is also called a Crofton measure for the Finsler metric H. Thus for smooth linearly additive Finsler metrics, Pogorelov's result establish the existence of a Crofton measure, in general not positive. It seems that the problem of inversion of (1) and construction of the measure μ by means of H was not considered before (we refer to the survey [2]). The equation (1) where H is a given even function and h is required, we call *generalized cosine equation*.

In [1] we propose an inversion formula for the solution of the integral equation using integral and stochastic geometry methods.

References

[1] Aramyan, R. H. (2011), Reconstruction of Crofton measures from projective Finsler metrics $\mathbf{R}^3$. arXiv:1103.4088v1 [math.MG].

[2] Schneider, R. (2006), Crofton measures in projective Finsler spaces. In: Integral Geometry and Convexity (Proc. Int. Conf., Wuhan, China, Oct. 2004; Eds. E.L. Grinberg, S. Li, G. Zhang, J. Zhou), World Scientific, New Jersey, pp. 67 - 98.

Irreducible isometries

V. Arzumanian

Institute of Mathematics of the NAS of the RA
Email: vicar@instmath.sci.am

Semigroup S is called *involutive* (or *-semigroup) if a mapping (called *involution*) $^* : S \to S$ is defined, such that for any s, t the relations $(s^*)^* = s$ and $(st)^* = t^* s^*$ are satisfied.
Involutive semigroup S is called *inverse* if for any $s \in S$ the relation $ss^*s = s$ holds, where s^* is the unique element satisfying this relation.
The inverse semigroup $\mathfrak{S}$, generated by a single element (say, u) is called *elementary*. Let S be an inverse semigroup, $\mathcal{H}$ be a Hilbert space, $B(\mathcal{H})$ be the algebra of all linear bounded operators on $\mathcal{H}$. A *-morphism $\pi : S \to B(\mathcal{H})$ is called *representation* (precisely,*-representation). Representations π_1 and π_2 are called *equivalent* if the corresponding spaces $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ are isometrically isomorphic, $W : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, and $\pi_2(s) = W\pi_1(s)W^{-1}$, for any $s \in S$. Representation π is called *irreducible*, if the image $\pi(S)$ is an irreducible set on $\mathcal{H}$.
The enumeration (modulo equivalence) of irreducible representations is one of the most important problems in the semigroup theory.
In the talk a description of all irreducible representations of the semigroup $\mathfrak{S}$ is represented.
We begin with the following list of operator families.
I. Let $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$. The operator V_λ on $\mathbb{C}$ (considered as a one-dimensional Hilbert space) is defined as $V_\lambda x = \lambda\, x$. This family of operators is parameterized by the unit circle T^1.
II. Let V be the Toeplitz operator on l^2 defined for an element $x = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$ as $V_0 x = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Obviously, it is a semi-unitary.
III. Let $n \in \mathbb{N}, n > 1$. The operator V_n on n-dimensional Hilbert space $\mathbb{C}^n$ is defined as $V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. This family is parameterized by the set $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.
It is easy to verify that all described operators are irreducible.
These operators determine a family of mutually non equivalent irreducible representations π_α of the elementary semigroup $\mathfrak{S}$. Namely, $\pi_\alpha(u) = V_\alpha$ for the generator of S, where α is from $\mathcal{A} = T^1 \cup \{0\} \cup \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
The following result asserts that the just described representations are the only irreducible representations of the semigroup $\mathfrak{S}$.
Theorem. *Each irreducible representation of the elementary inverse semigroup is equivalent to one of the representations $\pi_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$.*

Thus, as a consequence we obtain:
1. The semigroup $\mathfrak{S}$ has continuum mutually non-equivalent one–dimensional irreducible representations (parameterized by the unit circle), one infinite dimensional irreducible representation (one-sided shift), and countably many mutually non-equivalent finite dimensional irreducible representations (parameterized by positive integers greater than 1).
2. Depending of the first two possibilities some relations may by considered in the one-generated inverse semigroup S:
(i) $u^*u = uu^* = e$, the identity. Then S is isomorphic to the group $\mathbb{Z}$, the well known case.
(ii) $u^*u = e \neq uu^*$. Such an inverse semigroup is called *bicyclic*, see [2,3].
3. There is no faithful (1:1) irreducible representation of the elementary inverse semigroup.
Now about an operator interpretation of the results.
It is obvious that an element of inverse semigroup, realized as a semigroup of operators, should be either a partial isometry, or zero. The main property of inverse semigroups translated into the operator language, means that all projections onto initial and final subspaces permute.
Let an inverse semigroup of operators is generated by a single isometry U with the initial projection $P = U^*U$, and the final projection $Q = UU^*$. Then, as it follows from Theorem, if U is irreducible, then the three cases are possible.
Namely, the case **I** is realized if $P = Q = \mathcal{I}$, identity operator, i.e. U is unitary operator; the case **II** is realized if $P = \mathcal{I} \neq Q$, i.e. U is a semi-unitary (if $Q = \mathcal{I} \neq P$, then U^* is semi-unitary); the case **III** is realized if $P \neq \mathcal{I}$ and $Q \neq \mathcal{I}$, and in this case the Hilbert space should be finite dimensional and the corresponding power of U has to be zero.
Example 1. Let $\mathcal{H} = l^2 \oplus l^2$, and $U = V_0 \oplus V_0^*$. This operator is non-irreducible, and the decomposition of $\mathcal{H}$ into the direct sum of two exemplars of l^2 corresponds to the direct sum of one sided shift and its adjoint (which both are irreducible).
Example 2. Let $\mathcal{H} = l^2 \otimes l^2$, and $U = V_0 \otimes V_0^*$. This operator is non-irreducible, and the expansion of U into the irreducible components is looked as follows:
$\mathcal{H} = \sum_{n\geq 2} \oplus \mathcal{H}_n$, $\dim \mathcal{H}_n = n$ and $U_n = \sum_{n\geq 2} \oplus V_n$.

References

1. A.H. Clifford and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Mathematical Surveys of AMS (Providence), v.I (1964), and v.II (1967).
2. B.A. Barnes, *Representations of the l^1 algebra of an inverse semigroup*, Trans. Amer. Math.Soc. **218**, 1976, 361-396.
3. V.A. Arzumanian, **-representations of inverse semigroups*, Hai. GA Tegh. *Mathematics*, **12**:2, 1978, 107-113 (in Russian).

Не финитно апроксимируемые хопфовы группы с тождеством

В.С. Атабекян

Хорошо известно, что все финитно аппроксимируемые конечно порожденные группы являются хопфовыми группами, т.е. любой их сюръективный эндоморфизм является автоморфизмом. Р. Григорчуком доказано существование континуума конечно порожденных периодических финитно аппроксимируемых групп. Еще в 1964 году Е. С. Голод построил первые примеры бесконечных, конечно порожденных финитно аппроксимируемых периодических групп. Во всех этих примерах порядки элементов построенных групп неограниченно возрастают. В то же время известная проблема Х.Нейман спашивает: являются ли хопфовыми бескоонечные конечно порожденные свободные периодические группы с тождеством $x^n = 1$. Отметим, что не финитная аппроксимируемость относительно свободных групп, удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$, например, для простых $n > 665$, следует из знаменитых результатов С.И.Адяна и А.И.Кострикина.

Нами доказана

Теорема. *Если нечетное число* $r \geq 1003$ *является собственным делителем числа* n, *то* r*-периодическое произведение конечного количества циклических групп периода* n *– не простая хопфова группа.*

Подчеркнем, что указанные в теореме группы не финитно аппроксимируемы и в них выполняется тождество $x^n = 1$.

Compact Quantum Semigroup on the reduced semigroup C*-algebra

M.A. Aukhadiev

Kazan State Power Engineering University

E-mail: *m.aukhadiev@gmail.com*

A unital C^*-algebra $\mathcal{A}$ with unital *-homomorphism $\Delta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ is called a *compact quantum semigroup* ([2]) if Δ satisfies *coassociativity condition*:

$$(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta.$$

Δ is called a *comultiplication.* If the linear subspaces

$$\{\Delta(b)(a \otimes I);\ a, b \in \mathcal{A}\}, \tag{1}$$

$$\{\Delta(b)(I \otimes a);\ a, b \in \mathcal{A}\}, \tag{2}$$

are dense in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, then $(\mathcal{A}, \Delta)$ is called a *compact quantum group* [3]. A *-homomorphism $\epsilon\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ is called a counit if for any $a \in \mathcal{A}$

$$(\epsilon \otimes id)\Delta(a) = a,\ (id \otimes \epsilon)\Delta(a) = a.$$

State $h \in \mathcal{A}^*$ is called a *Haar functional* in $\mathcal{A}^*$ if the following conditions hold for any $a \in \mathcal{A}$:

$$(h \otimes id)\,\Delta\,(a) = (id \otimes h)\,\Delta\,(a) = h\,(a)\,I, \tag{3}$$

Let S be a subsemigroup of an additive abelian torsion-free group Γ with zero. *Regular isometric representation* is a map $T : S \to B(l^2(S))$, $a \mapsto T_a$, defined as follows:

$$(T_a f)(b) = \begin{cases} f(c), & \text{if } b = a + c \text{ for some } c \in S; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

C^*-algebra generated by the regular isometric representation of semigroup S is called a *reduced semigroup C^*-algebra*, denoted by $C^*_{red}(S)$. Consider ideal $I = \{AB - BA | A, B \in C^*_{red}(S)\}$, which is called a *commutator ideal.* It is known that the quotient of the algebra $C^*_{red}(S)$ by the commutator ideal is isomorphic to the algebra $C(G)$ of continuous functions on G – the dual group of Γ.

Define comultipication Δ on the generators of the algebra $C^*_{red}(S)$:

$$\Delta(T_a) = T_a \otimes T_a,\ a \in S, \tag{4}$$

Theorem 1. *The comultiplication Δ given by (4) can be extended to a continous injection* $\Delta\colon C^*_{red}(S) \to C^*_{red}(S) \otimes C^*_{red}(S)$.

This result generalizes the result shown in [1]. Thus, the algebra $C^*_{red}(S)$ can be considered as a compact quantum semigroup. And this compact quantum semigroup has the following interesting properties.

Theorem 2. *The compact quantum semigroup* $(C^*_{red}(S), \Delta)$ *admits a counit* ε *and a Haar functional* h *given by the following relations:*

$$\varepsilon(T_a) = 1, \ \varepsilon(T_a^*) = 1,$$

$$h(I) = 1, h(A) = 0, A \neq I.$$

We may identify $C(G) \otimes C(G) = C(G \times G)$. Then the algebra $C(G)$ admits a natural comultiplication Δ_G, for any $f \in C(G)$, $x, y \in G$ we have:

$$\Delta_G(f)(x, y) = f(xy).$$

With this comultiplication $C(G)$ becomes a compact quantum group. It turns out that this comultiplication is strongly related to the ne defined above.

Theorem 3. *The restriction of comultiplication Δ on the quotient* $C^*_{red}(S)/I$ *coincides with* Δ_G.

References

[1] M.A.Aukhadiev, S.A.Grigoryan, E.V.Lipacheva: A Compact Quantum Semigroup Generated by an Isometry, Russian Mathematics (Iz. VUZ), Vol.55, No.10, pp. 78–81, 2011.

[2] A. Maes, A. Van Daele.: Notes on Compact Quantum Groups, Nieuw Arch. Wisk. **4** 16, no. 1-2, 73–112 (1998)

[3] S.L. Woronowicz.: Compact quantum groups, Symétries quantiques (Les Houches, 1995), 845–884, North-Holland, Amsterdam, 1998.

Метрические инварианты и топологические характеристики групп гомеоморфизмов прямой.

Л.А. Бекларян

Центральный Экономико-Математический Институт РАН [1]
E-mail: *sbeklar@cemi.rssi.ru*, *beklaryan@stream.ru*

Группы гомеоморфизмов прямой являются важным классом групп. В связи с этим, отметим три задачи из разных разделов математики. Первая задача связана с описанием широкого класса абстрактных групп- счетных правоупорядочиваемых групп. Вторая задача связана с классификацией функционально-дифференциальных уравнений, в которых функции отклонения аргумента задаются гомеоморфизмами прямой. Третья - это задача Альфорса о приведении группы квазикомформных преобразований верхней полуплоскости к группе комформных преобразований с помощью квазикомформного преобразования.

Решение каждой из отмеченных задач приводит к изучению метрических инвариантов и топологических характеристик для произвольной группы гомеоморфизмов прямой. Будет определена серия метрических инвариантов, сформулированы критерии их существования в терминах топологических характеристик, канонических подгрупп, а также комбинаторных свойств. На этом пути, будет дано неулучшаемое усиление теоремы Боголюбова-Крылова-Дейя о существовании инвариантной меры для аменабельной группы гомеоморфизмов прямой. Дана классификационная схема для функционально-дифференциальных уравнений. Описана структура группы следов квазикомформных отображений в задаче Альфорса, которая является группой квазисимметрических преобразований прямой.

[1]Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант №12-01-00768-а) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5998.2012.1)

Spectral analysis of Schrödinger operators with unusual semiclassical behaviour

P. Exner and D. Barseghyan

While the idea of Hermann Weyl to analyze spectra of quantum systems semiclassically, by looking at the phase space allowed for the corresponding classical motion, is one of the most seminal in modern mathematical physics, its validity is not universal. Various examples of systems which have purely discrete spectrum despite the fact the respective phase space volume is infinite were constructed in the last three decades. A classical one belongs to B. Simon [Si83] and describes a two-dimensional Schrödinger operator with the potential $|xy|^p$ having deep "valleys" the width of which is shrinking with the distance from the origin. A related problem concerns spectral properties of Dirichlet Laplacians in regions with hyperbolic cusps — we refer to the recent paper [GW11] for an up-to-date bibliographical survey.

We want to demonstrate that similar spectral behaviour can occur also for Schrödinger operators with potentials unbounded from below. Furthermore, we intend to construct a model which exhibit a nontrivial spectral transition as the coupling constant changes. Specifically, we are going to consider the following class of operators,

$$L_p(\lambda)\,:\; L_p(\lambda)\psi = -\Delta\psi + \Big(|xy|^p - \lambda(x^2+y^2)^{p/(p+2)}\Big)\,\psi\,, \quad p \geq 1\,, \quad (1)$$

on $L^2(\mathbb{R}^2)$ using the standard Cartesian coordinate (x,y) in $\mathbb{R}^2$; the parameter λ controlling the second term of the potential is non-negative. Since $\frac{2p}{p+2} < 2$ the above operator is essentially self-adjoint on $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ by Faris-Lavine theorem – cf. [RS75], Thms. X.28 and X.38; in the following the symbol $L_p(\lambda)$ will always mean its closure.

First we show that there is a critical value of the coupling constant λ, expressed explicitly as ground-state eigenvalue of the corresponding (an)harmonic oscillator Hamiltonian, such that the spectrum of $L_p(\lambda)$ is below bounded and purely discrete for $\lambda < \lambda_{\text{crit}}$, while for $\lambda > \lambda_{\text{crit}}$ it becomes unbounded from below. The main our result are the upper and lower bounds to the sums of the first N eigenvalues of $L_p(\lambda)$ in the subcritical case.

They give the same asymptotics up to a multiplicative constant if $\lambda = 0$, while for $\lambda > 0$ this remains true for the leading term but an additional one, linear in N, is added in the lower bound. The proof of the upper bound is reduced to the case $\lambda = 0$, hence it is not surprising the result holds for any $\lambda < \lambda_{\text{crit}}$. On the other hand, the argument which yields the lower bound is more subtle and we have been able to prove the result for sufficiently small values of λ only leaving room for improvement. We prove also a lower bound to spectral sums of the operator $-\Delta_D - \lambda(x^2 + y^2)$ for $0 \leq \lambda < 1$, where $-\Delta_D$ is the Dirichlet Laplacian on the region with hyperbolic cusps; formally speaking this can be regarded as the limit $p \to \infty$ of the problem (1).

The goal of the next part of our work is to derive estimates of eigenvalue moments for Dirichlet Laplacians and Schrödinger operators in regions having infinite cusps which are geometrically nontrivial being either curved or twisted; we show how those geometric properties enter the eigenvalue bounds. The obtained inequalities reflect the essentially one-dimensional character of the cusps and we give an example showing that in an intermediate energy region they can be much stronger than the usual semiclassical bounds.

References

[GW11] L. Geisinger, T. Weidl, *Sharp spectral estimates in domains of infinite volume*, Rev. Math. Phys. **23** (2011), 615–641.

[RS75] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, II. Fourier Analysis. Self-Adjointness*, Academic Press, N.Y. 1975

[Si83] B. Simon, *Some quantum operators with discrete spectrum but classically continuous spectrum*, Ann. Phys. **146** (1983), 209–220.

Теория приводимости гипергрупп над группой

С.Г. Далалян

Ереванский государственный университет, Ереван
E-mail: *dalalyan@ysu.am*

Структура (правой) гипергруппы над группой индуцируется на любом дополнительном множестве M к произвольной подгруппе H всякой группы G. Она определяется восемью структурными отображениями, подчиняющимися 12 основным соотношениям ([1]). В более рациональном варианте ее можно определить с помощью четырех структурных отображений, удовлетворяющих шести аксиомам. В [1] освещаются вопросы применения гипергрупп к решению открытых задач классической теории групп. В [2] строится категория гипергрупп над группой. В [3] в широком контексте излагается основополагающий результат о том, что, с точностью до изоморфизма, всякая гипергруппа над группой возникает как гипергруппа, ассоциированная с некоторым дополнительным множеством к подгруппе группы. В данном докладе строится, так называемая, теория приводимости для гипергрупп над группой, заключающаяся в том, что каждой гипергруппе над группой канонически сопоставляется вполне приведенная гипергруппа над группой.

Структурные отображения (правой) гипергруппы ${}_HM$ составляют бинарная операяция $\Xi : MM \to M$ на множестве M, „скалярное произведение“ $\Lambda : MM \to H$ на M со значениями в H, правое действие $\Phi : MH \to M$ группы H на M и отображение $\Psi : MH \to H$.

Теорема 1. *Для любой правой гипергруппы ${}_HM$ мнижество M вместе с бинарной операцией Ξ образует правую лупу.*

Теорема 2. *С каждой правой лупой (M, Ξ) канонически ассоциируются*

(a) „скалярное произведение“ со значениями в S_M:

$$\Lambda_\Xi : MM \to S_M, \quad \Xi(\Xi(a,b),c) = \Xi(a^{\Lambda_\Xi(b,c)}, \Xi(b,c));$$

(b) „действие“ M на S_M:

$$\Psi_\Xi : MS_M \to S_M, \quad \Xi(a,b)^\alpha = \Xi(a^{\Psi_\Xi(a,\alpha)}, b^\alpha).$$

Действие Ψ_Ξ оставляет неподвижным левый нейтральный элемент o правой лупы (M, Ξ).

Пусть H_Ξ - *ассоциант* правой лупы (M, Ξ), то есть подгруппа симметрической группы S_M, порожденная образом $Im\,\Lambda_\Xi$ скалярного произведения Λ_Ξ. Пусть $S_{M,o}$ - стабилизатор элемента o. Подгруппа H' симметрической группы S_M называется *допустимой* для правой лупы (M, Ξ), если она инвариантна относительно действия Ψ_Ξ, содержит ассоциант H_Ξ и содержится в стабилизаторе $S_{M,o}$.

Как известно, задание действия Φ группы на множество равносильно заданию ассоциированного с ним представления $\underline{\Phi} : H \to S_M$. Обозначим через $K = Ker\underline{\Phi}$ ядро этого гомоморфизма. Гипергруппа ${}_HM$ называтся *вполне приведенной*, если K тривиально.

Теорема 3. *С каждой гипергруппой ${}_HM$ канонически ассоциируется единственная вполне приведенная гипергруппа ${}_{H'}M$ над изоморфной H/K подгруппой H' симметрической группы S_M такая, что правая лупа гипергруппы ${}_{H'}M$ совпадает с правой лупой гипергруппы ${}_HM$.*

Теорема 4. *С каждой правой лупой (M, Ξ) канонически ассоциируется вполне приведенная правая гипергруппа M над ассоциантом H_Ξ этой лупы такая, что ее правая лупа совпадает с исходной.*

Теорема 5. *Пусть ${}_{H'}M$ - вполне приведенная правая гипергруппа над группой $H' < S_M$, (M, Ξ) - ее правая лупа и ${}_{H_\Xi}M$ - канонически ассоциированная с этой правой лупой правая гипергруппа. Тогда H' - допустимая группа для правой лупы (M, Ξ) и ${}_{H'}M$ получается из ${}_{H_\Xi}M$ стандартной конструкцией расширения группы скаляров.*

С применением общей теории в [4] и [5] вычисляются структурные отображения правых гипергрупп третьего порядка, возникающих из симметрических групп S_3 и S_4.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Далалян С.Г., *О гипергруппах, преднормальных подгруппах и простейших группах.* Конф. посвящ 90-летию М.М.Джрбашяна, 27-28 окт. 2008, Ереван.

2. Далалян С.Г., *О категории гипергрупп.* Конф. посвящ 90-летию ЕГУ, 4-5 июня 2009, Ереван.

3. Dalalyan S.H., *The equivalences between the categories of hypergroups over group and the corresponding categories.* Pros. of the fourth Inter. Group Theory Conf. of Iran, Isfahan, 7-9 March 2012.

4. Zolfaghari P., *The hypergroups of order three,arising from symmetric group S_3.* Pros. of the fourth Inter. Group Theory Conf. of Iran, Isfahan, 7-9 March 2012.

5. Zolfaghari P., *The order 3 right hypergroups over group, arising from symmetric group S_4*, Conf. of AMU, Yerevan, 29 May - 2 June 2012.

Goldbach's Problem in Primes with Binary Expansions of a Special Form

K.M. Eminyan

Financial University under the Government of the Russian Federation.
Bauman State Technical University. Moscow.

E-mail: *eminyan@mail.ru*

Let $n = e_0 + e_1 2 + \ldots + e_k 2^k$ be a binary expansion of a natural number n, $(e_j = 0, 1)$. Let $\mathbb{N}_0$ be a set of natural numbers whose binary expansions have an even number of ones, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$. Let

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad n \in \mathbb{N}_0; \\ -1, & \text{if} \quad n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

In 1968, A.O. Gelfond [1] proved that numbers from the sets $\mathbb{N}_0$ and $\mathbb{N}_1$ are regularly distributed in arithmetical progressions.

In 1991, The author got [2] the asymptotical formula for the sum

$$\sum_{n \leqslant x,\ n \in \mathbb{N}_0} \tau(n)$$

and so solved Dirichlet divisors problem in the numbers of class $\mathbb{N}_0$.

In 2010, C. Mauduit and J. Rivat [3] proved in particular that the densities of sets of primes of the classes $\mathbb{N}_0$ and $\mathbb{N}_1$ are equal to each other. B. Green gave another proof of this fact [4]. These papers are based on estimates of exponential sums of a special type, which, by the force and by methods of proofs, are variants of estimate, derived by the author in 1991, of the integral of modulus of a trigonometric sum of the special type [2].

In this paper the ternary Goldbach problem in prime numbers of the set $\mathbb{N}_0$ is solved.

The main results are contained in the following theorems.

Theorem 1. *Let α be an arbitrary real number. There exists an absolute constant $\varkappa > 0$ such that*

$$S = \sum_{n \leqslant X} \varepsilon(n)\Lambda(n)e^{2\pi i \alpha n} = O(X^{1-\varkappa}).$$

The constant in sign O is absolute.

Theorem 2. *Let $J(N)$ be the number of representations of odd N by sum of three primes, and $J_0(N)$ be the number of representations of odd N by sum of three primes from the set $\mathbb{N}_0$.*

Then the equality

$$J_0(N) = \frac{1}{8}J(N)(1 + O(N^{-\varkappa}\ln N)),$$

holds, where $\varkappa > 0$ is a constant from theorem 1.

References

[1] A.O. Gelfond, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données". *Acta Arith.,* 13 (1968), 259–265.

[2] K.M. Eminyan, "On the Dirichlet divisor problem in some sequences of natural numbers", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 55:3 (1991), 680—686

[3] C. Mauduit et J. Rivat, "Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers". *Annals of Mathematics*. Second Series. 2010. V. 171. No 3, 1591–1646.

[4] B. Green, "Three topics in additive prime number theory". ArXiv: 0710.0823.

On the summability of trigonometric Fourier series by method Cesaro

L.N. Galoyan

E-mail: *lev.nik.galoyan@gmail.com*

Let $S_n(x,f)$ be the n-th partial sum of the trigonometric Fourier series of summable function $f(x)$. For a fixed $\alpha \in R$ the sums

$$\sigma_n^\alpha(x,f) = \frac{1}{A_n^\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_k(x,f),$$

where

$$A_0^\alpha = 1, \quad A_k^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+k)}{k!}, \ k = 1, 2, ...$$

is called the Cesaro means of order α or (C,α) means of the Fourier series of function $f(x)$.

Definition. The Fourier series of the function $f \in L[-\pi,\pi]$ is called almost everywhere summable by the method (C,α), if for almost all x

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(x,f).$$

According to the classical theorem of Fejer-Lebesgue, the Fourier series of any integrable function is almost everywhere summable by method (C,α), for $\alpha > 0$. It is known that the same result for the $(C,0)$ means does not hold (Kolmogorov's sample). On the other hand, according to equality

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n^0(x,f) - f(x)|^r dx = 0, \quad f \in L[-\pi,\pi], \quad r \in (0,1),$$

the $(C,0)$ means is converge in measure, and therefore contain almost everywhere convergent subsequence. In paper [1] D.E. Men'chov raised the following question: would it be fair to the same result for the Cesaro means of negative order? In other words, there must Cesaro means of negative order of the Fourier series of a summable function $f(x)$ contain almost everywhere convergent subsequence? In the same paper, Men'chov has given this question a negative answer.

Theorem 1. There exist an integrable function such that any subsequence of (C, α), $\alpha \in (-1, 0)$ means of Fourier series of this function diverges on the set of positive measure.

Note that in [4] proved an analogue of **Theorem A** for the Fourier series in the Walsh system. in [2] and [3] proved the following theorems.

Theorem 2. Let $\alpha < 0$ and $\alpha \neq -1, -2, ...$ Then for any a.e. finite function $f(x)$ defined on $[-\pi, \pi]$ and for any positive number ε there exists a set $E \subset [-\pi, \pi]$, continuous, $2\pi-$periodic function $g(x)$ and a sequence of natural numbers m_ν, $\nu = 0, 1, ...$ such that

1) $mE > 2\pi - \varepsilon,$

2) $g(x) = f(x), \quad x \in E,$

3) $\sigma^{\alpha}_{m_\nu}(x, g) \rightrightarrows g(x), \quad \nu \to \infty :$

Theorem 3 . Let $\alpha \in (-1/2, 0]$.Then for any a.e. finite function $f(x)$ defined on $[-\pi, \pi]$ and for any positive number ε there exist a function $\widetilde{f}(x)$ for which $m\{x : f \neq \widetilde{f}\} < \varepsilon$ and the means $\sigma^{\alpha}_{m}(x, \widetilde{f})$ are converge uniformly.

Note the results of M.G. Grigorian and the author.

Theorem 4. For any positive number ε there exist a sequence of natural numbers m_ν, $\nu = 0, 1, ...$ such that for any a.e. finite function $f(x)$ defined on $[-\pi, \pi]$ one can find a set $E \subset [-\pi, \pi]$ with measure $mE > 2\pi - \varepsilon$ and a function $\overline{f}(x)$ with properties

1) $\overline{f}(x) = f(x), \quad x \in E,$

2) $\sigma^{\alpha}_{m_\nu}(x, \overline{f}) \rightrightarrows \overline{f}(x), \ \nu \to \infty, \ \forall \alpha < 0, \ \alpha \neq -1, -2, ...$

Theorem 5. For any positive number ε there exists a sequence of natural numbers m_ν, $\nu = 0, 1, ...$ and a set $E \subset [-\pi, \pi]$ with measure $mE > 2\pi - \varepsilon$ such that for any function $f \in L[-\pi, \pi]$ one can find a function $\widehat{f} \in L[-\pi, \pi]$ with properties

1) $\widehat{f}(x) = f(x), \quad x \in E,$

2) $\sigma^{\alpha}_{m_\nu}(x, \widehat{f}) \to_{a.e.} \widehat{f}(x), \nu \to \infty, \quad \forall \alpha < 0, \ \alpha \neq -1, -2, ...$

Remark. In theorem 2 the sequence m_ν, $\nu = 0, 1, ...$ depends on the function and the α, as in theorem 4 the sequence is the same for all integrable functions and the means $\sigma^{\alpha}_{m_\nu}(x, \overline{f})$ converge for all $\alpha < 0$, $\alpha \neq -1, -2, ...$

References

[1] Д. Меньшов, “Применение методов суммирования Чезаро отрицательного порядка к тригонометрическим рядам Фурье от суммируемых функций и от функций с суммируемым квадратом”,Мат.

сборник, Т. 93(135), № 4,494-511 (1974).

[2] Д. Меньшов, “Свойства чезаровских средних отрицательного порядка и некоторых других Г-средних для рядов Фурье от непрерывных функций”, МАТ. СБ. Т. 85(128), № 3(11).

[3] Кашин Б.С., Кошелева Г. Г. , “Об одном подходе к теоремам об "исправлении"”, Вестн, Моск. Ун-та,сер.1,Математика.Механика., 1988, № 4 5-8

[4] Л.Н. Галоян, “О сходимости в метриках $L_p,\ p > 1$ средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье-Уолша” Известие НАН Армении, т. 47, н.6 , стр. 25-40(2012).

On bounded projections on L^p spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$

N.T. Gapoyan

Some linear operators, which depend on normal pair of weighted functions $\{\varphi, \psi\}$, in the Banach spaces $L^p(B)$, where B is the unit ball of $\mathbb{C}^n$, are considered. We investigate, for which p these operators are bounded.

The concept of a normal pair of weight functions for the first time is introduced by Shields and Williams [1] and it has appeared convenient for a statement, bound with estimates of integrals and for exposition of projectors, given in weight spaces.

A function is called normal if there exist $k > \varepsilon > 0$ and $\mathrm{r}_0 < 1$ such that

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\varepsilon}} \searrow 0 \quad \textit{and} \quad \frac{\varphi(r)}{(1-r)^{k}} \nearrow \infty \quad (r_0 \leq r, \;\; r \to 1-0). \qquad (1)$$

The functions $\{\varphi, \psi\}$ is called a normal pair if φ is normal and if, for some k satisfying (1), there exists $\alpha > k-1$ such that $\varphi(r)\psi(r) = (1-r^2)^{\alpha}$, $0 \leq r < 1$.

The following result is obtained:

Theorem 1. *If $\{\varphi, \psi\}$ is a normal pair, then for $p(k-\alpha) < 1$ the integral operator*

$$Tf(z) = \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{(1-\langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}} f(w)\, d\nu(w)$$

is a bounded projector in $L^p(B, d\nu)$.

Here $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$ is the inner product in $\mathbb{C}^n$, and ν is the Lebesgue measure in $\mathbb{C}^n$, normalized by $\nu(B) = 1$;

The case $n = 1$ is surveyed in [3]. Note that the case of power weight functions is considered in [2, Chapter 1, Theorem 1.9].

References

[1] A.L. Shields, D.L. Williams, *Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971), 287–302.

[2] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. Theory of Bergman Spaces, Springer Verlag, 2000.

[3] A.I. Petrosyan, A.F. Beknazaryan, *On bounded operators in L^p spaces,* Proceedings of the Yerevan State University(2011), no. 2, pp. 11-16.

Опциональные (O) мартингалы и их приложения

К. В. Гаспарян

Факультет математики и механики
Ереванский государственный университет, Ереван 0025, Армения
E-mail: kargasp@gmail.com

Опциональные (сильные) мартингалы были введены и изучены в работах Деллашери и Мейера [1], Деллашери [2], Горовица [3], Гальчука [4 - 5], Ленгляра [6] и других. Основным отличием теории O-мартингалов от классической теории мартингалов является отказ от так называемых "обычных"допущений на стохастический базис $\mathfrak{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$: условия полноты фильтрации $\mathbb{F}$ по вероятностной мере $\mathbb{P}$ и ее непрерывности справа $\mathcal{F}_{t_+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$. В результате этого, в отличие от рассматриваемых в классической теории семимартингалов с траекториями из пространства Скорохода $\mathbb{D}$ непрерывных справа имеющих пределы слева функций, в данной теории семимартингалы $X = (X_t)$ являются опционально (O)-измеримыми с траекториями из пространства функций $\mathbb{L}$ допускающих оба односторонних предела X_{t-} и X_{t+}. Теория O-мартингалов нашла свои приложения в теории стохастических дифференциальных уравнений [7], в теории нелинейной фильтрации и стохастической аппроксимации [8], а также, недавно, в стохастической финансовой математике [9]. В дальнейшем, в результате введения в пространстве $\mathbb{L}$ метрики [10], аналогичной метрике Скорохода в пространстве $\mathbb{D}$, превратившее пространство $\mathbb{L}$ в полное сепарабельное метрическое пространство, стало возможным рассматривать вопросы слабой сходимости O-семимартингалов и центральные предельные теоремы, дающие условия слабой сходимости O-мартингалов к непрерывному гауссовскому мартингалу [11]. Полученные предельные теоремы вместе с усиленными законами больших чисел [12] и законом повторного логарифма [13] нашли свое применение в статистических приложениях: были исследованы асимптотические свойства оценок наименьших квадратов в регрессионых O-мартингальных моделях [14], был получен аналог известного неравенства Рао-Крамера для общих процессов с фильтрацией [15], рассмотрено предельное поведение оценок наименьших квадратов в моделях стохастической аппроксимации Роббинса-Монро и Кифера-Волфовица [8], доказана асимптотическая нормальность логарифма процесса частичного правдоподобия для последовательности бинарных статистических экспериментов.

Список литературы

[1] C. Dellacherie, P. A. Meyer, *Un nouveau theoreme de projection et de section, Seminar Probab. IX, Strasbourg, Lect. Notes Math., 465, Springer, 241 – 246 (1975).*

[2] C. Dellacherie, Deux remargues sur la separabilite optionnale, *Seminar Probab. X, Strasbourg, Lect. Notes Math., 511, Springer, 47 – 50 (1976).*

[3] J. Horowitz, Optional Supermartingales and the Andersen-Jessen Theorem, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 43, 263 – 272 (1976).*

[4] Л. И. Гальчук, Опциональные мартингалы, *Матем, сб., 112 (154), но. 4(8), 483 – 521 (1980).*

[5] Л. И. Гальчук, Стохастические интегралы по опциональным семимартингалам и случайным мерам, *Теория вероятн. и ее примен., том 29, вып. 1, 93 – 107 (1984).*

[6] E. Lenglart, Tribus de Meyer et theorie des processus, *Seminar Probab. XN, Strasbourg, Lect. Notes Math., 784, Springer, 500 – 546 (1980).*

[7] К. В. Гаспарян, О стохастических уравнениях по опциональным семимартингалам, *Изв. ВУЗ-ов, но. 12, 57 – 60 (1985).*

[8] " — " — " —". О процедурах стохастической аппроксимации. Мартингальный подход, *Доклады НАН Арм., том 94, но. 2, 67 – 72 (1993).*

[9] C. Kühn, M. Stroh, A note on stochastic integration with respect to optional semimartingales, *Electronic Communication in Probab., vol. 14, 192 - 201 (2009).*

[10] K. V. Gasparian, On a Skorokhod topology on the space of function with first kind of discontinuity, *The Survey of Applied and Industrial Mathem., Moscow, Part 1, Vol. 12, no. 3, p. 688 (2005).*

[11] " — " — " —". Functional Limit Theorems for O-Semimartingales, *In: Proceed. 8-th Seminar on Probab. and Stoch. Processess, Rusht (Iran), Gulian Univ., 20 – 28 (2011).*

[12] " — " — " —". Об асимптотическом поведении опциональных мартингалов, *ДАН Арм. том 93, но. 5, 212 – 219 (1992).*

[13] " — " — " —". Законы повторного логарифма для опциональных мартингалов, *Изв. НАН Арм., том 29, но. 3, 33 – 53 (1994).*

[14] " — " — " —". On a regression model with O-martingale noise, *Dinamic Systems, Nonlinear Analysis and Application, Materials of Int. Conf., Yerevan, 2011 -M.: CEMI RAS, p. 11 (2011).*

[15] " — " — " —". Неравенство Рао-Крамера для общих статистических моделей с фильтрацией, *Изв. НАН Арм., Математика, 39, но. 2, 13 – 26 (2004).*

The covariogram of a triangle and orientation–dependent chord length distribution

A. Gasparyan and V. K. Ohanyan

Yerevan State University, Department of Mathematics and Mechanics[1 2]
E-mail: *Ara1987-87@mail.ru, victo@aua.am*

Let $\mathbf{R}^2$ be the Euclidean plane and $X \subset \mathbf{R}^2$ be a bounded convex domain having interior points, and let $S(\cdot)$ be the area of X.

Definition 1. *The function $C(X,\cdot)$ is called the covariogram of set X, where $C(X,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, defined by the formula*

$$C(X,h) = S(X \cap (X-h)), \qquad h \in \mathbb{R}^2$$

We denote by S^1 the unit circle in $\mathbf{R}^2$ centered at the origin. Let $u \in S^1$ be fixed. The orientation–dependent chord length distribution is specified only by lines, which are parallel to u. We denote by $b(X,u)$ the breadth of the domain X in the direction u.

Definition 2. *The following function is called the orientation–dependent chord length distribution function of domain X in direction $u \in S^1$:*

$$F(X,u,t) = 1 - \frac{b(X \cap (X-tu),u)}{b(X,u)}, \qquad t \geq 0.$$

The connection between the covariogram and the orientation–dependent chord length distribution function first obtained by Matheron (see [1] – [3]).

We obtain the following results.

1. The explicit form of the covariogram for any triangle and orientation–dependent chord length distribution function.

2. The explicit form for the chord length distribution function.

3. The length of maximal chord of the triangle is continuous on S^1.

4. If we have orientation–dependent chord length distribution function for an everywhere dense set of S^1, then we can uniquely recognize the triangle with respect to reflection and translation.

[1]The investigation is done with partial support of the State Science Committee of Republic of Armenia, Grant 11-1A-359

[2]The investigation is done with partial support of the State Science Committee of Republic of Armenia, Grant 11-1A-125

References

[1] G. Matheron, (1975), *Random Sets and Integral Geometry*, Wielly, New York.

[2] G. Averkov and G. Bianchi, (2007), "Retrieving convex bodies from restricted covariogram functions", *Adv. Appl. Prob. (SGSA)*, **39**, pp. 613 – 629.

[3] G. Averkov and G. Bianchi, (2009), "Confirmation of Matheron's conjecture on the covariogram of a planar convex body", *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **11**, no. 6, pp. 1187 – 1202.

Prediction of volatility for some financial models

K.V. Gasparyan, L.K. Khachatryan

Yerevan State University, Department of Mathematics and Mechanics
E-mail: *kargasp@gmail.com, lilitkhachatryan89@gmail.com*

Main factor for prediction of the market behavior is the conditional variation (volatility) of the corresponding model. It is assumed, that the information about the states of the market are known.

We use the assets prices of the Synopsys available from March 14, 1995 to March 13, 2012 (overall 4273 observation) and find that it has properties of conditional heteroscedastic models (ARCH) [2]. We use this finding to construct, first, point prediction of the volatility [3], second, an interval forecast for the volatility [4].

Furthermore, using the method proposed in [5] we derive the interval forecast for non-conditional coverage and independence hypothesis.

References

[1] Tsay R., 2005 "Analysis of Financial Time Series".

[2] Zivot E., 2008. "Practical Issues in the Analysis of Univariate GARCH Models", University of Washington, Department of Economics.

[3] Marzo M., Zagaglia P., 2007. "Volatility Forecasting for Crude Oil Futures".

[4] Marcucci J., 2005. "Forecasting Stock Market Volatility with Regime-Swiching GARCH Models". Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, vol. 9, issue 4.

[5] Christoffersen P., 1998. "Evaluating Interval Forecasts" International Economic Review, Vol. 39.

Об автоморфизмах периодических произведений

А.Л.Геворгян

Автоморфизм группы G называется внутренним, если образ всякого элемента из G при этом автоморфизме получается сопряжением фиксированным элементом $g \in G$. Если $\phi(H) = H$ для любой нормальной подгруппы H группы G, то автоморфизм ϕ называется нормальным автоморфизмом группы G. Ясно, что все внутренние автоморфизмы являются нормальными. Возникает естественный вопрос об обратном включении. Совпадение нормальных и внутренних автоморфизмов установлено для многих классов групп: для нециклических абсолютно свободных групп – А. Любоцким, 1980г; для свободных разрешимых группа класса $r \geq 2$ – В.Романковым, 1983; для свободных нильпотентных групп ступени нильпотентности 2 – Г.Эндимиони, 2003г; для фундаментальных групп замкнутых поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики – О. Богополским, Е.Кудрявцевой и Х.Цишангом, 2004 ; для свободного произведения нетривиальных групп – М.В.Нещадимом,1996г; для свободных бернсайдовых групп нечетного периода – В.Атабекяном, 2011г.; для относительно гиперболических групп без нетривиальных конечных нормальных подгрупп – А.Минасяном и Д.Осиным, 2010г.

Нами получен следующий результат.

Теорема. *Пусть n и $r \geq 1003$ – нечетные числа и $F = \prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle$ есть $n-$периодическое произведение циклических групп $\langle a_i\rangle$ порядка r $(i \in I)$. Тогда если n делится на r, то каждый нормальный автоморфизм группы $F = \prod\limits_{i\in I}{}^{n}\langle a_i\rangle$ является внутренним.*

n-периодические произведения групп были введены С.И. Адяном в работе [1] для решения проблемы Мальцева. Важные результаты о периодических произведениях получены в работах [2–5].

Список литературы.

[1]. С. И. Адян, Периодическое произведение групп, *Тр. МИАН* , (1976), 142, 3–21. [2]. С. И. Адян, О простоте периодических произведений групп, *Докл. АН СССР* , (1978), 241:4, 745–748. [3]. S. V. Ivanov, On periodic products of groups, *Internat. J. Algebra Comput.*,(1995), l5:1, 7–17. [4]. В. С. Атабекян, О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна,*Тр. МИАН*, (2011), 274, 15–31. [5]. С.И.Адян, Еще раз о периодических про изведениях групп и проблеме А.И.Мальцева, *Матем. заметки*, (2010), 88:6, 3-10.

On the asymptotics of the solution of a second order inhomogeneous finite difference equations

L. Gevorgyan

State Engineering University of Armenia,
Department of Mathematics

E-mail: *levgev@hotmail.com*

Key words: Finite difference equation, asymptotics, fixed point, contracting mapping
AMS Mathematics Subject Classification 39A06, 39A22.

We consider a second order inhomogeneous finite difference equation with the constant coefficients

$$z_{n+1} + pz_n + qz_{n-1} = \alpha_n,\ n \in \mathbb{N},$$

where the sequence $\{\alpha_n\}$ belongs to the one of the spaces $l^p, (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ or to the subspaces c, c_0. Let the roots of the corresponding characteristic equation satisfy the inequalities $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$. We show that the sequence $\{z_{n+1} - \lambda_1 z_n\}$ belongs to the same subspace as $\{\alpha_n\}$. If the latter sequence converges, then

$$\lim_{n\to\infty} (z_{n+1} - \lambda_1 z_n) = \frac{1}{1-\lambda_2} \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

The Newton Polyhedron in the Theory of Behavior of Polynomials and in General Theory of Differential Equations

H.G.Ghazaryan

Yerevan State University.
E-mail: *haikghazaryan@mail.ru*

Let R^n $n-$ be $n-$ dimensional euclidian space of points $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, N_0^n be the set of all $n-$ dimensional multi - indices, i. e. the set of points $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, where α_i are nonnegative integers. For $\xi \in R^n$ and $\alpha \in N_0^n$ we set $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, where $D_j = \partial/\partial\xi_j$ $(j = 1, ..., n)$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$.

Let $P(D) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$, be a differential operator with constant coefficients, where the sum expends over a finite collection of multi - indices $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, and $P(\xi) = \sum \gamma_\alpha \, \xi^\alpha$ be corresponding characteristic polynomial (complete symbol). We write $Q < P$ if for some constant $C > 0$. $|Q(\xi)| \leq C[|P(\xi)| + 1]$ $\forall \xi \in R^n$.

Definition 1 (see [1] and [2]) An operator $P(D)$ (polynomial $P(\xi)$) is said to be *hypoelliptic* (*almost hypoelliptic*), if $D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ as $|\xi| \to \infty$ for all $0 \neq \nu \in N_0^n$ ($D^\nu P < P$ for all $\nu \in N_0^n$.).

Definition 2 (see [3] or [4]). **The Newton polyhedron (N.p.)** $\Re(P)$ of an operator $P(D)$ (polynomial $P(\xi)$) is the smallest convex polyhedron in R^n containing all multi - indices of (P).

N.p. generalize the notion of the degree of a polynomial of n variables and plays similar role.

Definition 3 (see [3]) A polyhedron $\Re$ with vertexes from N_0^n is said to be **complete** if $\Re$ has a vertex at the origin and one vertex along esch coordinate axis. The $k-$ dimensional faces of a polyhedron $\Re$ are denoted by $\Re_i^k$ $(i = 1, \cdots, M_k, k = 0, 1, \cdots, n-1)\cdot$ The face $\Re_i^k$ of a polyhedron $\Re$ is said to be **principal** if among the exterior (with respect to $\Re$) normals of this face there is one with at least one positive component.If among the exterior normals of the principal face $\Re_i^k$ there is one whose components are all nonnegative (positive), then the face $\Re_i^k$ is said to be regular (completely regular). A polyhedron $\Re$ is said to be **regular (completely regular)**, if $\Re-$ is complete and all $(n-1)-$ dimensional noncoordinate faces of $\Re$ are regular (completely regular).

Definition 4 (see [3]) The face $\Re_i^k$ $(1 \leq i \leq M_k, 0 \leq k \leq n-1)$ of the polyhedron $\Re = \Re(P)$ of an operator $P(D)$ (polynomial $P(\xi)$) is said to be **nondegenerate** if $P^{i,\,k}(\xi) \neq 0$ for $\xi \in R^n$, $\xi_1...\xi_n \neq 0$, where $P^{i,\,k}(\xi)-$ subpolynomial of polynomial P, corresponding to the face $\Re_i^k$.

We denote by I_n the set of polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ such that $|P(\xi)| \to \infty$ as $|\xi| \to \infty$. In [5] it was founded a necessary and sufficient condition for $P \in I_2$ both for nondegenerate and degenerate polynomials .

For nondegenerate polynomials we have

Theorem1 (see [3] and [2]) $P \in I_n$ if and only if N.p. $\Re(P)$ is complete.

Theorem 2 Let $P \in I_n$. An operator $P(D)$ is hypoelliptic if and only if N.p. $\Re(P)$ is completely regular.

Theorem 3 Let $P \in I_n$. An operator $P(D)$ is almost hypoelliptic if and only if N.p. $\Re(P)$ is regular.

References

[1] L. Hörmander, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators". Springer ,1983

[2] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials". Doklady Ross. Acad. Nauk. v. 398, n. 6, p.p 701 - 703, 2004.

[3] V.P.Mikhailov "Behavior at infinity of a certain class of polynomials". Proc. Steklov Inst. Math. v. 91, 1967.

[4] S. Gindikin, L.Volevich, "The method of Newtons Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations". Kluwer, 1992.

[5] H.G.Ghazaryan, V.N.Margaryan "On behavior at infinity of nonelliptic polynomials". Journal of Contemporary Math Analysis (Armenian akademy of science), Math.,v.39,no. 3, p.p. 21 - 38, 2004.

О колебаниях безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки

Г.Р. Гулгазарян, Дж.Л. Срапионян

АГПУ им. Х. Абовяна

Исследуются собственные колебания ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки открытого профиля, со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. Предполагается, что образующие ортогональны к краям оболочки и квадрат кривизны направляющей кривой поверхности можно представить в виде ряда

$$R^{-2} = k^2(r_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta), \quad 0 \le \beta \le s \tag{1}$$

$$k = 2\pi/s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty$$

Здесь β - длина переменной дуги направляющей кривой, s - полная длина направляющей кривой между жестко защемленными граничными образующими.

Задаче соответствует неотрицательно определенный оператор $L_0^{(cc)}$, который не допускает разделение переменных. Аналогичным образом как в [1] доказывается, что спектр частот оператора $L_0^{(cc)}$ не является чисто дискретным. Она имеет две ограниченные зоны непрерывного спектра. Вне этих зон спектр частот оператора $L_0^{(cc)}$ состоит из изолированных собственных частот конечной кратности.

Для нахождения собственных частот оператора $L_0^{(cc)}$ и соответствующих собственных форм применяется обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова. В качестве базисных функций используются следующие функции:

$$W_m(\beta) = 1 - \cos km\beta, \quad k = 2\pi/s, \quad 0 \le \beta \le s, \quad m = \overline{1, +\infty} \tag{2}$$

Получены дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения безразмерных характеристик собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи планарных колебаний прямоугольной пластинки. Численными расчетами показана эффективность полученных асимптотических формул.

Список литературы

[1] Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания.// Сибирский Математический журнал, 1973, Т.4, N 5, с. 978-986.

Кодированное метрическое пространство

Ю.Г. Григорьян

Европейская региональная образовательная академия
E-mail: yurgrig@yahoo.com

Предварительные понятия и результаты см. [5, 6].

Определение 1. *Множество действительных чисел $\mathfrak{R}$ ($|\mathfrak{R}| \geqslant 3$) без нуля называется скалярным множеством, если оно удовлетворяет двум условиям:*
а) для любой пары различных $A, B \in \mathfrak{R}$, $A + B > 0$;
б) для любой тройки различных $A, B, C \in \mathfrak{R}$, $AB + AC + BC \geqslant 0$.

Предложение 1. *Каждой тройке действительных чисел $A, B, C \in \mathfrak{R}$ можно поставить в соответствие некоторый треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ с длинами сторон*

$$a = |B_1C_1|, \quad b = |A_1C_1|, \quad c = |A_1B_1|. \tag{1}$$

где

$$A = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2}, \quad B = \frac{a^2 - c^2 - b^2}{2}, \quad C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \tag{2}$$

Следствие 1. *Каждому евклидовому треугольнику $\triangle A_1B_1C_1$ можно поставить в соответствие равный ему евклидов треугольник с числовыми обозначениями $\triangle ABC$, где*

$$a = |B_1C_1| = |BC|\sqrt{B + C},$$
$$b = |A_1C_1| = |AC| = \sqrt{A + C}, \quad c = |A_1B_1| = |AB| = \sqrt{A + B} \tag{3}$$

Найдем площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона, подставляя (3), получим:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{AB + AC + BC} \geqslant 0. \tag{4}$$

Исходя из (3) и (4), основные тригонометрические функции представляются в виде:

$$\cos\angle BAC = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 4S^2}}, \quad \sin\angle BAC = \frac{2S}{\sqrt{A^2 + 4S^2}} \tag{5}$$

$$\mathrm{tg}\angle BAC = \frac{2S}{A}, \quad A = 2S \cdot \mathrm{ctg}\angle BAC. \tag{6}$$

Перейдем к вопросам асимметрии пространства $\mathfrak{R}(D)$.

Определение 2. *Множество действительных чисел $\mathfrak{R}$ без нуля называется асимметрическим множеством, если существует хотя бы один элемент $A \in \mathfrak{R}$ такой, что $-A \notin \mathfrak{R}$.*

Определение 3. *Параметрическое множество действительных чисел*

$$\mathfrak{R}(D) = \{D\} \cup (|D|, \infty) \tag{7}$$

с фиксированным $D < 0$ называется D-асимметрическим множеством.

Заметим, что $\mathfrak{R}(D)$ асимметрично относительно любого своего элемента и для любой пары (A, B), $A, B \in \mathfrak{R}(D)$

$$A + B > 0. \tag{8}$$

Поскольку данная последующая аксиоматика строится на базе целых чисел, в дальнейшем будем рассматривать только целочисленные множества.

Зафиксируем целое число $D \leqslant -2$ и рассмотрим бесконечное параметрическое множество целых чисел

$$\mathfrak{R}(D) = \{D, -D+1\} \cup \left\{D^2 - D + i\right\}, \quad i = 0, 1, 2 \ldots \tag{9}$$

Множество $\mathfrak{R}(D)$ является дискретным примером D-асимметрического множества $\mathfrak{R}(D)$ (7) и оно асимметрично относительно любого своего элемента. Имеет место теорема

Теорема 1. *Параметрическое множество целых чисел $\mathfrak{R}(D)$ из (9) при любом $D \leqslant -2$ является скалярным множеством.*

Доказательство теоремы приведено в [6].

Теорема 2. *Параметрическое множество целых чисел (D) из (9) при любом фиксированном $D \leqslant -2$ является D-асимметрическим множеством.*

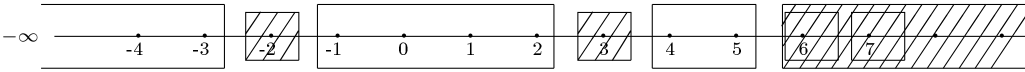
Доказательство очевидно.

Теорема 3. *Параметрическое множество целых чисел $\mathfrak{R}(D)$ из (9) для каждого фиксированного $D \leqslant -2$ образует метрическое пространство с метрикой*

$$r(A, B) = \begin{cases} \sqrt{A+B}, & A \neq B \\ 0, & A = B \end{cases} \tag{10}$$

(Метрика (10) была впервые введена автором в 1982г. [1]).

Построенное метрическое пространство $\mathfrak{R}(D)$ отличается от известных, например, от дискретного пространства Хемминга [2] тем, что оно является дискретным бесконечным пространством. Структура множества $\mathfrak{R}(D)$ для случаев $D = -2$ приведена на Рис.1



$D = -2$, $\mathfrak{R} = \{-2, 3\} \cup \{6 + i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Рис.1

Определение 4. *Точкой пространства дискретных геометрий* $\mathfrak{R}(D_0)$ *из* (11) *при фиксированном* $D_0 \leqslant -2$ *называется любое целое число* $X \in \mathfrak{R}(D_0)$.

Определение 5. *При фиксированном* $D_0 \leqslant -2$ *пара целых чисел* (X, Y), $X, Y \in \mathfrak{R}(D_0)$ *называется дискретным отрезком, если:*

$$\sqrt{X+Y} \ \text{– целое число.} \tag{11}$$

Определение 6. *При фиксированном* $D_0 \leqslant -2$ *пара целых чисел* (X, Y), $X, Y \in \mathfrak{N}(D_0)$ *называется дискретным особым отрезком, если:*

1. $\sqrt{X+Y}$ *– целое число*

2. существует целое число $Z \in \mathfrak{N}(D_0)$ *такое, что*

$$XZ + YZ + XY = 0. \tag{12}$$

В [5] при любом фиксированном $D_0 \in \mathfrak{N}(D)$, ($D_0 \leqslant -2$) вводятся понятия трех различных дискретных плоскостей $\mathcal{E}$, $\overline{\mathcal{E}}$, $\mathcal{P}$ со своими определяющими точками:

$$\mathcal{E}\{A, B, K, D_0\}, \quad \overline{\mathcal{E}}\{A, B, K, D_0, C\}, \quad \mathcal{P}\{A, B, K, D_0, C, E, F\},$$

которые соответственно называются дискретной плоскостью, дискретной расширенной плоскостью, предельной дискретной плоскостью; схематически их можно представить в виде системы из шести уравнений с семью неизвестными:

$$\left.\begin{array}{c}\left.\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c} A + D_0 = B + K \\ AD_0 + BK = 0 \\ K + D_0 = 1 \end{array}\right] \mathcal{E} \\ KC + D_0C + KD_0 = 0 \end{array}\right] \overline{\mathcal{E}}\right. \\ K^2 + D_0^2 + C^2 = E^2 \\ A^2 + B^2 + C^2 = F^2 \end{array}\right] \mathcal{P} \tag{13}$$

При фиксированном $D_0 \leqslant -2$ каждая из подсистем $\big(\mathcal{E}, \overline{\mathcal{E}}, \mathcal{P}\big)$ системы (13) имеет единственное целочисленное решение (14), выраженное через нечетный параметр $n = 1 - 2D_0$ $(n \geqslant 5)$:

$$\begin{gathered} D_0 = -\frac{n-1}{2}, \;\; K = \frac{n+1}{2}, \;\; C = \frac{n^2-1}{4}, \\ E = \frac{n^2+3}{4}, \;\; B = \frac{n(n-1)}{2}, \;\; A = \frac{n(n+1)}{2}, \;\; F = \frac{3n^2+1}{4}, \end{gathered} \tag{14}$$

который удовлетворяет условию:

$$\mathcal{E} \supset \overline{\mathcal{E}} \supset \mathcal{P}. \tag{15}$$

Следует заметить, что нечетный праметр $n = 1 - 2D_0 \geqslant 5$, принимающий значения: $5, 7, 9, 11, \ldots$, по существу, разделяет (квантует) все пространство $\mathfrak{N}(D)$ (9) на бесконечное множество подпространств $\mathfrak{N}(D_0)$, удовлетворяющих системе (13).

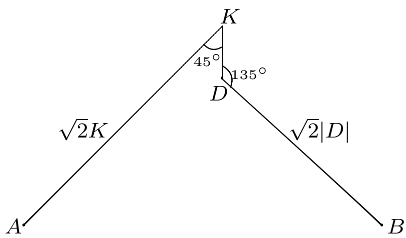


Рис.2 арифметическая модель
дискретной плоскости $\mathcal{E}\{A, B, K, D_0\}$

Список литературы

[1] Григорьян Ю.Г. Геометрия арифметических графов. Журнал "Кибернетика", 1982, N4, с. 1-4.

[2] Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. Пер. с англ., М., 1964.

[3] Григорьян Ю.Г. Эксперименты на цифровой машине по распознаванию зрительных образов. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, -М., 1964, N2, с. 40-49.

[4] Grigoryan Yu.G. Principles of inhomogeneous geometry. Algebra, Geometry & their Application (Seminar Proceedings), vol. 3-4, 2004, p. 40–53.

[5] Григорьян Ю.Г. Пространство дискретных геометрий. Журнал "Кибернетика и системный анализ" -2006, N5, с. 22–32.

[6] Григорьян Ю.Г. Неклассические свойства пространства дискретных геометрий. Журнал "Кибернетика и системный анализ" - 2009, N5, с. 51–59.

Минимальные площади некоторых многоугольников

Г. Акопян, А. Арутюнян

ЕГУ, АГПУ

E-mail: hamlet.tsolakovich@yahoo.com, Aharutyunyan2011@gmail.com

Рассмотрим на координатной плоскости сеть, образованную множеством точек с челочисленными координатами, и простые многоугольники, вершинами которых являются точки этой сети. Далее будем рассматривать только точки с целочисленными координатами. Более 100 лет назад была доказана формула Пика [1].

Теорема Пика. Площадь произвольного простого многоугольника равна

$$S = q + \frac{p}{2} - 1 \, ,$$

где q – количество внутренних точек, а p – количество граничных точек многоугольника.

Пользуясь этой формулой нами получены следующие результаты

Утверждение 1. *Для любого конечного множества точек существует многоугольник, внутренними точками которого являются только точки этого множества.*

Многоугольник, содержащий заданное множество внутренних точек и имеющий минимальную площадь, назовем минимальным.

Очевидно, что площадь минимального многоугольника с одной внутренней точкой равна $1,5$. Обозначим через $\rho(a,b)$ – количество внутренних точек отрезка, соединяющего точки a и b, и через $S(\{a,b\})$ – площадь минимального многоугольника с внутренними точками a и b. Отметим, что $\rho(a,b)$ не является расстоянием, т.к. не удовлетворяется неравенство треугольника (для произвольных точек a и b существует такая точка c, что $\rho(a,c) = \rho(c,b) = 0$).

Утверждение 2. *Для произвольных точек a, b, c и d если $\rho(a,b) = \rho(c,d)$, то*

$$S(\{a,b\}) = S(\{c,d\})\,.$$

Утверждение 3.

$$S(\{a,b\}) = \begin{cases} 2,5 & \textit{если}\ \rho(a,b) = 0, \\ 3 & \textit{если}\ \rho(a,b) = 1, \\ 3,5 & \textit{если}\ \rho(a,b) \geqslant 2. \end{cases}$$

Пусть A – множество, состоящее из n точек. Через $S(A)$ обозначим площадь минимального многоугольника с множеством внутренних точек A. Пусть $S(n) = \max\limits_{|A|=n} S(A)$. Из полученных утверждений следует, что $S(1) = 1,5$ и $S(2) = 3,5$. Показано также, что $S(3) \leqslant 5,5$ и $S(n)$ ограничено сверху константой, которая зависит только от n.

Список литературы

[1] Pick. G Geometrisches zur Zahlenlehre // Sitzungber. Lotos (Prague), – 1899. – V. 19, P. 311-319.

On geometry of seven dimensional submanifolds in pseudo-euclidean Rashevsky space E_4^8

N. S. Hakobyan

Kh. Abovyan Armenian State Pedagogical University

Keywords: hypermanifold, differential geometric structure, affine connection, curvature, torsion.

Seven dimensional submanifolds of Euclidean and pseudo-Euclidean spaces are in the number of the most studying objects in Theoretical Physics. It is done by deductive method, it was suggested by Kaluza T. who studied 4 dimensional space-time theory as a special case of 5 dimensionaltheory [1]. In this case it's necessary to construct 8 dimensional geometricaltheory, then come to seven dimensional geometrical theory, which will describe different special cases of physical interactions[2]. Development of ideas of Relativity Theory come to the ideas of seven or eleven dimensional Universe [3]. The unified field theory has close relation with tensor of gravitation, it can be considered as a component of curvature tensor, but it is not completely studied yet. The geometry of some classes of seven dimensional submanifolds without torsion in pseudo-Euclidean space E_2^8 and its structure equations were studied in [5].

The metric of E_4^8 after some canonization of the moving frame it can be reduced to the form

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 - \left(dx_1\right)^2 - \left(dx_2\right)^2 - \left(dx_3\right)^2 - \left(dx_4\right)^2 .$$

The manifold E_4^8 is a 8-dimensional pseudo-Euclidean Rashevsky space and it is composed by two families of 4 dimensional fibers. The structure equations of E_4^8 can be written in the following form

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta,\ d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta,\ d\omega_\beta^\alpha = \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, \ldots, 4, \tag{1}$$

where the secondary forms ω_β^α are defined on the manifold $\left(E_4^8\right)^{(2)}$ of the second order frames on E_4^8. Let's study the embedding defined by:

$$\omega^4 = \omega_1. \tag{2}$$

Substitution of relation (2) in bilinear form $d\varphi$ can be reduced to the form: $d\varphi^* = \omega^i \wedge \omega_i + \omega_1 \wedge \omega_4$, which is non-degenerated bilinear form and exterior differentiation shows that the bilinear form $d\varphi^*$ is closed. The metric of this hypermanifold after some canonization of the moving frame can be reduced to the form

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 - \left(dx_1\right)^2 - \left(dx_2\right)^2 - \left(dx_3\right)^2 - \left(dx_4\right)^2 .$$

The present paper is devoted to the study of some classes of hypermanifolds described by embedding (2).

The following result holds.

Theorem 1. *Metrical connection of the pseudo-Euclidean space E_4^8 generates the differential geometric structure of special type of the affine connection definedby differential forms ω^i, ω_i, ω_4, ω_1^1, ω_4^4, ω_η^ξ and functions a_{11}^4, $a_{\xi\eta}^4$, $h_{\xi\eta}^1$, f_{41}^1 satisfying structure equations* (3) *and differential equations* (4) *on hypermanifold M without torsion determined by embedding* (2).

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1 + f_{41}^1 \omega^1 \wedge \omega_1, \; d\omega^\xi = \omega_\eta^\xi \wedge \omega^\eta, \\ d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1 - a_{11}^4 \omega^1 \wedge \omega_4, \; d\omega_4 = -\omega_4^4 \wedge \omega_4 - f_{41}^1 \omega^1 \wedge \omega_1, \\ d\omega_\xi = -\omega_\xi^\eta \wedge \omega_\eta - h_{\xi\eta}^1 \omega^\eta \wedge \omega_1 - a_{\xi\eta}^4 \omega^\eta \wedge \omega_4, \\ d\omega_1^1 = f_{41}^1 a_{11}^4 \omega^1 \wedge \omega_4, \; d\omega_\eta^\xi = \omega_\mu^\xi \wedge \omega_\eta^\mu, d\omega_4^4 = -a_{11}^4 f_{41}^1 \omega^1 \wedge \omega_4, \end{cases} \tag{3}$$

where coefficients a_{11}^4, $a_{\xi\eta}^4$, $h_{\xi\eta}^1$, f_{41}^1 satisfy the following differential equations:

$$\begin{array}{l} \nabla a_{11}^4 = 0, \; \nabla a_{\xi\eta}^4 = a_{11}^4 h_{\xi\eta}^1 \omega^1 + a_{\xi\eta\mu}^4 \omega^\mu + a_{11}^4 h_{\xi\eta}^1 \omega_4, \; a_{\xi\eta\mu}^4 = a_{\xi\mu\eta}^4 \\ \nabla h_{\xi\eta}^1 = a_{\xi\eta}^4 f_{41}^1 \omega^1 + h_{\xi\eta\mu}^1 \omega^\mu, \; h_{\xi\eta\mu}^1 = h_{\xi\mu\eta}^1, \; \nabla f_{41}^1 = f_{411}^1 \omega^1 + f_{41}^1 f_{41}^1 \omega_1. \end{array} \tag{4}$$

It's easy to see that the system of Pfaff's equations $\xi = 2, 3$ is totally integrable. It defines in M three dimensional submanifold with curvature tenzor $f_{41}^1 a_{11}^4 \neq 0$.

Theorem 2. *Hypermanifold M is a seven dimensional fiber bundle with three dimensional submanifoldwith curvature as a base and four dimensional pseudo-Euclidean Rashevsky space as a fiber.*

References

[1] Kaluza T., On problem of unification of physics (in Russian), collection "Al. Einstein and the theory of gravitation", M., Mir, 1979, p.p.529-534.

[2] U. Vladimirov. Yu. S., Gubanov A. N., Unification of grave-electroweak and strong interactions in an 8 dimensional theory, Gravitation and cosmology,, Vol. 5, 1999, No 4(20), p.p. 277-280.

[3] S.W. Hawking, The Universe in a Nutshell, USA, Bantam, 2001, 224 p.

[4] E. Cartan,J.Riemannian Geometryin an OrthogonalFrame (In Russian), M.V. Lomonosov Moscow State University Press, 1960, 307 p.

[5] Hakobyan N., On Geometry of Seven Dimensional Submanifolds without torsion in Pseudo-Euclidean space E_2^8, Kh.Abovyan ASPU Scientific Review, N1(16), 2012, pp. 20-34.

Chord length distribution function for convex polygons

H. S. Harutyunyan

Yerevan State University. [1]
E-mail: *hrach87@gmail.com*

Let $\mathbb{G}$ be the space of lines g in the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$, (p, φ) = the polar coordinates of the foot of the perpendicular to g from the origin O, be standard coordinates for a line $g \in \mathbb{G}$.

Let $\mu(\cdot)$ stand for locally finite measure on $\mathbb{G}$ invariant with respect to the group of all Euclidean motions (translations and rotations). It is well known that the element of the measure up to a constant factor has the following form (see [1]): $\mu(dg) = dp\, d\varphi$, where dp is one dimensional Lebesgue measure, while $d\varphi$ is the uniform measure on the unit circle. For a bounded convex domain $\mathbb{D}$ we denote by $[\mathbb{D}] = \{g \in \mathbb{G} :\ g \cap \mathbb{D} \neq \emptyset\}$ and we have (see [1]): $\mu([\mathbb{D}]) = |\partial\mathbb{D}|$, where $|\partial\mathbb{D}|$ stands for the length of boundary $\mathbb{D}$.

Distribution function of the length of a random chord $\chi = g \cap \mathbb{D}$ is defined as

$$F(y) = \frac{1}{|\partial\mathbb{D}|}\, \mu(A_{\mathbb{D}}^{y}) = \frac{1}{|\partial\mathbb{D}|} \iint_{A_{\mathbb{D}}^{y}} d\varphi\, dp,$$

where

$$A_{\mathbb{D}}^{y} = \{g \in [\mathbb{D}] :\ |\chi(g)| \leq y\}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Explicit formulae for the chord length distribution functions are known only for the cases of a disc, a rectangle and a regular polygon (see [2] and [3]).

Our main result is an algorithm for calculation the chord length distribution function for a bounded convex polygon. In the particular case an expression for the chord length distribution function for a rhombus is obtained.

[1] This research was partially supported by the State Committee of Science of the Republic of Armenia, Grant 11-1A-125

References

[1] R. Schneider and W. Weil (2008). Stochastic and Integral Geometry, *Springer Verlag*, Berlin.

[2] N. Aharonyan and V. Ohanyan (2005). Chord length distribution functions for polygons, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)* **40**, no 4, 43 – 56.

[3] H. Harutyunyan and V. Ohanyan (2009). Chord length distribution function for regular polygon, *J. Appl. Prob.* **42,** no. 2, 358 – 366.

Замечания к системе аксиом Д. Гильберта

С.Х. Арутюнян

Армянский Государственный педагогический университет им. Х. Абовяна

Кризис основ математики во второй половине XIX века способствовал проведению исследований, направленных на создание аксиоматики Геометрии, основанной на современной теории множеств, поскольку традиционная аксиоматика Евклида была архаичной и не соответствовала основным направлениям развития математики. Эта задача была решена выдающимся немецким математиком Д. Гильбертом в его знаменитой монографии "Основания Геометрии" в 1899г [1]. Начальный вариант книги содержал некоторые ошибки, которые были исправлены рецензентом – выдающимся французским математиком А. Пуанкаре. В 1903г. первая Международная премия им. Лобачевского по Геометрии была присуждена Д. Гильберту, а первая золотая медаль им. Лобачевского – А. Пуанкаре.

Система Гильберта содержит 20 аксиом, разбитых на 5 групп: аксиомы связи (принадлежности), порядка точек на прямой, совмещаемости геометрических фигур, непрерывности, параллелизма. Основными геометрическими фигурами являются точки, прямые, плоскости, пространство, основными отношениями – принадлежность, порядок, совмещаемость. В пределах данной работы наибольший интерес представляют первые две группы аксиом.

Представим в сокращенном виде аксиомы первых двух групп.

1.1. Для любых двух точек существует единственная прямая, проходящая через эти точки. Любая прямая содержит по крайней мере две точки. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

1.2. Для любых трех точек, не принадлежащих одной и той же прямой, существует единственная плоскость, содержащая каждую из этих точек. Любая плоскость содержит по крайней мере одну точку.

1.3. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки этой прямой принадлежат этой плоскости.

1.4. Если две плоскости содержат общую точку, то эти плоскости содержат по крайней мере еще одну общую точку.

1.5. Существуют четыре точки, не принадлежащие одной и той же плоскости.

2.1. Если точка B расположена между точками A и C, то A, B, C – попарно различные точки одной и той же прямой и точка B расположена между точками C и A.

2.2. Среди любых трех точек одной и той же прямой существует одна и только одна точка, расположенная между двумя остальными точками.

2.3. Для любых точек A и B существует по крайней мере одна точка C прямой AB, такая, что точка B расположена между точками A и C.

2.4. (Паш). Пусть точки A, B, C не принадлежат одной прямой, прямая d не проходит через какую-либо из этих точек, но пересекает один из отрезков AB, BC, CA во внутренней точке. Тогда прямая пересекает и один из двух остальных отрезков во внутренней точке.

После этого с помощью аксиомы Паша Гильберт доказывает, что между любыми двумя точками A и B существует по крайней мере одна точка C. Между тем в аксиоме Паша используется понятие внутренней точки отрезка. Эта очевидная логическая ошибка приводит к задаче обоснования существования внутренних точек отрезка на основании аксиом 1.1-2.3. В работах [2, 3] авторы отмечают, что не видно способа решения этой задачи. Одной из целей настоящей работы является обоснование возможности доказать, что существование внутренней точки отрезка является следствием аксиом 1.1-2.3.

С этой целью вводится понятие порядка прямых в пучка прямых в плоскости. Для введения отношения порядка в пучке его пересекают прямой d, не проходящей через вершину пучка; три прямые пучка пересекают эту прямую в трех точках и отношение порядка прямых определяется соответствующим отношением порядка этих точек. Доказывается также, что выбор прямой d не является существенным (Рис.1).

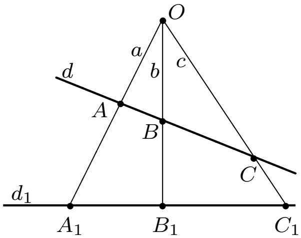


Рис.1

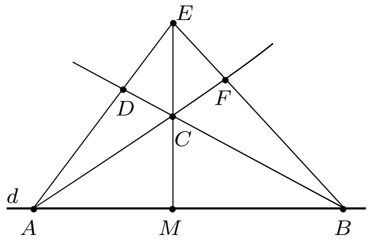


Рис.2

Затем доказываются теоремы, двойственные аксиомам 2.1-2.3. Наконец, доказывается, что между любыми двумя точками существует, по крайней мере, одна точка (Рис.2). Таким образом, изложение Д. Гильберта может быть скорректировано.

Второе замечание относится к русскому переводу монографии. Редактор перевода П.К. Рашевский в предисловии отмечает, что "..фактически с третьей группой аксиом Д. Гильберт вводит понятие движения плоскости". Отсюда следует, что поскольку понятие движения плоскости является одним из наиболее сложных понятий геометрии, система аксиом Д. Гильберта непригодна для школьного курса геометрии. На этом основании эта система подвергалась различным изменениям вплоть то того, что вместо аксиом совмещаемости (конгруэнтности) геометрических фигур вводили аксиомы "наложения", что не имеет ничего общего с геометрией. При этом стараются вовсе не замечать, что в курсе стереометрии вообще не затрагивается вопрос о сравнении геометрических фигур, то есть, "наложение" в пространстве не действует.

Список литературы

[1] Гильберт Д. Основания геометрии, ГИТТЛ, 1948.
[2] Ефимов Н.В. Высшая геометрия, М., "Наука", 1974, 576 стр.
[3] Каган В.Ф. Основания геометрии, Том II, ОГИЗ, 1949.

Geometric Evolution of Interfaces in the Functionalized Cahn-Hilliard Equation

G. Hayrapetyan

The functionalized Cahn-Hilliard energy (FCH) is a novel higher-order energy that serves as a model for network formation in solvated, functionalized polymers. Leading order minimizers of this energy include new bi-layer solutions with homoclinic cross sections. An overview of the reduction of the gradient flow of (FCH) to the sharp interface evolution is presented.

Riesz bases connected with the solutions of Sturm-Liouville equations

T.Harutyunyan, A.Pahlevanyan, A.Srapionyan

Yerevan State University.
E-mail: *hartigr@yahoo.co.uk, avetikpahlevanyan@gmail.com, a2na92@mail.ru*

Let $\lambda_n^2 = \lambda_n^2 \left(q, \alpha, \beta\right), \, n = 0, 1, 2, \ldots$ be the eigenvalues of the Sturm-Liouville boundary value problem $L\left(q, \alpha, \beta\right)$

$$ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \ q \in L^1_R\left[0, \pi\right], \ 0 < x < \pi, \ \lambda \in C, \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \ \alpha \in (0, \pi], \tag{2}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \ \beta \in [0, \pi). \tag{3}$$

For example, the eigenfunctions of the problem $L\left(0, \alpha, \beta\right)$ are

$$\varphi_n^0(x) = \cos\lambda_n(0, \alpha, \beta)x \cdot \sin\alpha - \frac{\sin\lambda_n(0, \alpha, \beta)x}{\lambda_n(0, \alpha, \beta)} \cdot \cos\alpha, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

which form complete, orthogonal system in $L^2[0, \pi]$.

Are the systems $\left\{\cos\lambda_n\left(0, \alpha, \beta\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ or $\left\{\sin\lambda_n\left(0, \alpha, \beta\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ complete or do they form bases by some means? We can remark that the system $\left\{\cos\lambda_n\left(0, \pi, 0\right)x\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\cos\left(n+1\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ is not complete in $L^2\left[0, \pi\right]$, but the system $\left\{\sin\lambda_n\left(0, \pi, 0\right)x\right\}_{n=0}^{\infty} = = \left\{\sin\left(n+1\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ is an orthogonal basis.

What can we say about completeness, orthogonality and basicity of the systems $\left\{\cos\lambda_n\left(q, \alpha, \beta\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ or $\left\{\sin\lambda_n\left(q, \alpha, \beta\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ in general case?

Such questions have been the subject of investigation in [1], [2], [3], [4] and other papers. Our result is:

Theorem 1. *1) The system* $\left\{\sin\lambda_n\left(q, \alpha, \beta\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ *is a Riesz basis in* $L^2\left[0, \pi\right]$ *for all* $\left(\alpha, \beta\right) \in \left(0, \pi\right] \times \left[0, \pi\right)$,

2) the system $\left\{\cos\lambda_n\left(q, \alpha, \beta\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ *is a Riesz basis in* $L^2\left[0, \pi\right]$ *if* $\alpha, \beta \in \left(0, \pi\right)$.

References

[1] *Paley R. and Wiener N. (1934). Fourier Transforms in the complex domain. Am. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 19, Am. Math. Soc., New York.*

[2] *Kadec, M.I. (1964). The exact value of the Paley-Wiener constant, Soviet Math. Dokl., 5, 559-561.*

[3] *He X. And Volkmer H. (2001) Riesz Bases of Solutions of Sturm-Liouville Equations. The Journal of Fourier Analysis and Applications, Volume 7, Issue 3, 297-307.*

[4] *G. Freiling and V. Yurko. (2001) Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications. Nova Science Publishers, Inc.*

The inverse problem with fixed boundary conditions

T.N. Harutyunyan

Yerevan State University.
E-mail: *hartigr@yahoo.co.uk*

Let $\lambda_n^2 = \lambda_n^2(q,\alpha,\beta)$, $n = 0,1,2,....$, are the eigenvalues of the Sturm-Liouille boundary value problem $L(q,\alpha,\beta)$

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \ \ 0 < x < \pi, \ \ q \in L_R^1[0,\pi], \ \ \lambda \in C \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \ \ \alpha \in (0,\pi), \tag{2}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \ \ \beta \in (0,\pi), \tag{3}$$

and let $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ is the solution of the equation (1), which satisfies the initial conditions

$$\varphi(0,\lambda,\alpha) = 1, \ \ \varphi'(0,\lambda,\alpha) = -ctg\alpha. \tag{4}$$

The numbers

$$a_n = a_n(q,\alpha,\beta) = \int_0^\pi |\varphi(x,\lambda_n,\alpha)|^2 dx, \ n = 0,1,2,\ldots$$

are called norming constants. $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ and $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ are called spectral data of the problem $L(q,\alpha,\beta)$.

By $\delta_n(\alpha,\beta)$, $n = 2,3,\ldots$, we denote the solutions of the equations

$$\delta_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\left[\arccos\frac{\cos\alpha}{\sqrt{[n+\delta_n(\alpha,\beta)]^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \arccos\frac{\cos\beta}{\sqrt{[n+\delta_n(\alpha,\beta)]^2\sin^2\beta + \cos^2\beta}}\right].$$

Theorem 1. *The sequences $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ and $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ are the spectral data of the problem $L(q,\alpha,\beta)$ with $q \in L_R^1[0,\pi]$ and fixed $\alpha,\beta \in (0,\pi)$ if and only if*

1) $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$

2) $\lambda_n = n + \delta_n(\alpha, \beta) + \frac{c}{2(n+\delta_n(\alpha,\beta))} + l_n,$ *where c=const,* $l_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *and*

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} l_n \sin nx \in W_1^1(0, 2\pi),$

3) $a_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$ *when* $n \to \infty,$

4) $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{2}{\pi}\right) = ctg\alpha.$

The necessary and sufficient conditions for $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ to be the spectral data for a certain problem $L(q, \alpha, \beta)$ (not necessary with fixed α, β) have been described in [1]-[5] and other papers. But in these papers there was not condition 4).

References

[1] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. "Определение дифференциального уравнения по его спектральной функции". Изв. АН СССР (сер. матем.) т. 15, 1951, стр. 309-360.

[2] Гасымов М.Г., Левитан Б.М. "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", УМН, том 19, стр. 1–63, 1964.

[3] Жиков В.В. "Об обратных задачах Штурма-Лиувилля на конечном отрезке" Изв. АН СССР, сер. матем. 1967. Т. 31. С. 965–976.

[4] Isaacson E.L., McKean H.P., Trubowitz E. "The inverse Sturm-Liouville problem, II" Com. Pure and Appl. Math., vol. 37, pp. 1-11, 1984.

[5] Freiling G, Yurko V. "Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications". Nova Science Publ., 2001.

Spectral properties of higher order semi-elliptic operators

G. Karapetyan, V. Bayramyan, N. Saribekyan

Introduction

In this paper we consider the eigenvalue problem for the operator

$$Hu = \sum_{\substack{(\alpha,\mu)=1\\(\beta,\mu)=1}} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(A_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u), x \in \Omega \tag{1}$$

subject to homogeneous Dirichlet boundary conditions, where $\mu = (1/m_1, \cdots, 1/m_N)$ is a multi-index and Ω is a bounded open set in $\mathbf{R}^N$. Let $A_{\alpha\beta}$ be bounded measurable real-valued functions defined on Ω satisfying $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ and the uniform semi-ellipticity condition

$$\sum_{\substack{(\alpha,\mu)=1\\(\beta,\mu)=1}} A_{\alpha\beta}(x)\xi_{\alpha}\xi_{\beta} \geq \theta|\xi|^2 \tag{2}$$

We denote by $W^{\mu}(\Omega)$ the Sobolev space of (equivalence classes of) real-valued functions in $L^2(\Omega)$, which have all distributional derivatives $D^{\alpha}u$, $(\alpha, \mu) \leq 1$, endowed with the norm

$$\|u\|_{W^{\mu}(\Omega)} = \sum_{(\alpha,\mu)\leq 1} \|D^{\alpha}u\|_{L^2(\Omega)} \tag{3}$$

We denote by $W_0^{\mu}(\Omega)$ the closure in $W^{\mu}(\Omega)$ of the space of the C^{∞}-functions with compact support in Ω.

We set

$$Q_{\Omega}'(u,v) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{(\alpha,\mu)=1\\(\beta,\mu)=1}} A_{\alpha\beta} D^{\alpha}u D^{\beta} v dx,\ Q_{\Omega}(u) = Q'(u,u), \tag{4}$$

for all $u, v \in W_0^{\mu}(\Omega)$.

We consider the following eigenvalue problem

$$Q'(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2(\Omega)} \tag{5}$$

Main Results

Theorem 1. *Let Ω be an open set in $\mathbf{R}^N$. Let $m \in \mathbf{N}_0^N$, $\mu = (1/m_1, \cdots, 1/m_N)$ and, for all $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^N$ such that $(\mu, \alpha) = (\mu, \beta) = 1$, let $A_{\alpha\beta}$ be real-valued functions defined on Ω, satisfying $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ and condition 2. Then there exists a non-negative self-adjoint linear operator $H_{W_0^\mu(\Omega)}$ on $L^2(\Omega)$ with compact resolvent, such that $Dom(H_{W_0^\mu(\Omega)}) = W_0^\mu(\Omega)$ and*

$$(H^{1/2}_{W_0^\mu(\Omega)} u, H^{1/2}_{W_0^\mu(\Omega)} v)_{L^2(\Omega)} = Q'_\Omega(u, v) \tag{6}$$

for all $u, v \in W_0^\mu(\Omega)$. Moreover, the eigenvalues of equation 5 coincide with the eigenvalues $\lambda_n[H_{W_0^\mu(\Omega)}]$ of $H_{W_0^\mu(\Omega)}$ and

$$\lambda_n[H_{W_0^\mu(\Omega)}] = \inf_{\substack{L \subseteq W_0^\mu(\Omega) \\ dim L = n}} \sup_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{Q_\Omega(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \tag{7}$$

We introduce a family of diffeomorphisms T_ϵ on Ω of class $C^{m_1, \cdots, m_n}$ represented by the following dioagonal matrix:

$$\begin{pmatrix} x_1 + \epsilon\psi_1(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 + \epsilon\psi_2(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_N + \epsilon\psi_N(x_N) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Lemma 1. *Let Ω be an open set in $\mathbf{R}^N$. Let $\mu = (1/m_1, \cdots, 1/m_N)$ and $B > 0$ and T be a diffeomorphism of Ω onto $T(\Omega)$ of class $C^{m_1, \cdots, m_n}$ such that*

$$\max_{1 \leq k \leq m_i} |\psi_i^{(k)}(x)| \leq B, i = 1, \cdots, N \tag{9}$$

for all $x \in \Omega$. Then there exists $c > 0$ depending only on N, μ and B such that

$$|Q_{T(\Omega)}(u \circ T^{-1}) - Q_\Omega(u)| \leq \epsilon c \sum_{\substack{(\alpha, \mu) = 1 \\ \alpha \neq 0}} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \tag{10}$$

for all $u \in W_0^\mu(\Omega)$

Theorem 2. *Let Ω be an open set in R^N. Let $B, \theta > 0$. Let $A_{\alpha\beta}$ be measurable real-valued functions defined on Ω,satisfying $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ and condition 2. Then there exists $c > 0$ such that*

$$|\lambda_n[T(\Omega)] - \lambda_n[\Omega]| \leq \epsilon c(1 + \lambda_n[\Omega]) \tag{11}$$

References

[1] V.I. Burenkov, P.D. Lamberti, Spectral stability of higher order uniformly elliptic operators. Sobolev Spaces in Mathematics II, International Mathematical Series, 2009, Volume 9, 69-102.

[2] Ivo Babuska, Rudolf Vyborny, Continious Dependence of Eigenvalues on the Domain, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 15 (1965), issue 2, pp. 169-178

[3] E.B. Davies, Spectral theory and differential operators, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

Теорема единственности для рядов по системе Стромберга

К.А. Керян, А.С. Мартиросян

В настоящей работе исследованы полиномиальные всплески Стромберга степени $m \geq 0$, изучение которых началось в 1983г. с работы Ж.-О. Стромберга (см. [1]). Эта система имеет похожие свойства с системой Франклина. В частности, в упомянутой работе Ж.-О. Стромберга [1] получена экспоненциальная оценка для порождающей функции τ:

$$|\tau(x)| \leq C_0 r^{|x|},\ 0 < r < 1.$$

Аналогичные оценки для функций классической системы Франклина известны как экспоненциальные оценки функций Франклина, доказанные З. Чисельским [3]. В настоящей работе указаны еще несколько сходств между этими системами, однако оказывается, некоторые свойства, которые верны для системы Франклина, и даже для линейных периодических всплесков Стромберга, не верны для полиномиальной системы Стромберга.

С.В. Бочкарев [2] доказал, что для классической системы Франклина оператор Пелли имеет слабый тип (1,1), а для общей системы Франклина с квазидиадическим и сильно регулярным разбиением аналогичная теорема была доказана в работе Г.Г. Геворкяна, А.С. Мартиросяна (см. [4]). В настоящей работе доказывается, что и в случае полиномиального всплеска Стромберга этот оператор имеет слабый тип (1,1). Используя методы работ [4]-[7], можно доказать, что из слабого типа $(1,1)$ оператора Пелли следует, что для $f \in L_1(\mathbb{R})$ справедливо

$$\mu\left\{t \in \mathbb{R} : Pf(t) > \lambda\right\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

А также доказывается следующая теорема:

Теорема 1 Пусть частные суммы $S_{JK}(t)$ ряда по системе Стромберга п.в. сходятся к функции $f(t)$ и

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mu\{t \in \mathbb{R} :\ S^*(t) > \lambda\} = 0,$$

где $S^*(t)$ мажоранта частных сумм.

Тогда этот ряд есть ряд Фурье-Стромберга функции f в смысле А-интегрирования, т.е. для всех $j,k \in \mathbb{Z}$ коэффициенты ряда a_{jk} восстанавливаются А-интегралами:

$$a_{jk} = (A)\int_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t)dt.$$

Аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана Г.Г. Геворкяном в работе [8], а для общей системы Франклина с сильно регулярным и квазидиадическим разбиением - М.П. Погосяном в работе [9].

Список литературы

[1] Stromberg J.-O. A modified Franklin system and heigher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for hardy spaces Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund. Wadsworth Math. Wadsworth, Belmont, CA: 1983. Pp. 475–494.

[2] Бочкарев С.В. Существование базисов в пространстве функций, аналитических в круге, и некоторые свойства системы Франклина. *Матем. сб.*, 95(1):3–18, 1974.

[3] Ciesielski Z., Properties of the orthonormal Franklin system II. *Studia Math.* 27 (1966), 289 – 323.

[4] Геворкян Г., Мартиросян А. Мажоранта и функция Пелли рядов по общей системе Франклина *Труды МИРАН, в печати.*

[5] G. G. Gevorkian, A. A. Sahakian. Unconditional basis properties of general Franklin series. *Izvestija Akad. Nauk Arm. SSR, ser. Mat*, 2-22. (in Russian), 35(2000), no. 4.

[6] Gevorkyan G.G., Kamont A. On general Franklin systems. *Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)* 374 (1998), pp. 1-59.

[7] Gevorkyan G.G., Kamont A. Unconditionality of general Franklin system in $L_p[0;1]$, $1 < p < 1$. *Studia Math.* 164 (2004), pp. 161 - 204.

[8] Геворкян Г.Г. Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина. *Математические заметки*, 59(4):521–545, 1996.

[9] Poghosyan M.P. Uniqueness of series by general Franklin systems. *Izv. Nat. Akademii Armenii*, 35(4), 2000.

О некоторых нелинейных интегральных уравнениях суммарно-разностными ядрами

А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян

Доклад посвящен вопросам разрешимости в пространствах $L_1(0,+\infty)$ и $L_\infty^0(0,+\infty)$ для следующего класса нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром

$$f(x)=\int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x-t)\,\overset{\circ}{N}(t,f(t))dt+\int_0^\infty \tilde{K}(x+t)\tilde{N}(t,f(t))dt,\quad x>0 \tag{1}$$

относительно искомой измеримой функций $f(x)$, где

$$\begin{gathered}0\leq \overset{\circ}{K}\in L_1(\mathbb{R}),\ \int_{-\infty}^{+\infty}\overset{\circ}{K}(\tau)d\tau=1,\ 0\leq \tilde{K}\in L_1(0,+\infty),\\ \int_x^\infty \tilde{K}(t)dt\leq\int_x^\infty \overset{\circ}{K}(t)dt,\ x>0.\end{gathered} \tag{2}$$

Накладывая некоторые условия на функции$\overset{\circ}{N}$ и $\tilde{N}$, получаем теоремы существования положительных решений из пространств $L_1(0,+\infty)$ и $L_\infty^0(0,+\infty)$.

A Property of Universes in Realizability Models for Intuitionistic Set Theory and its Corollaries

V. Khakhanian

Moscow State University of railway communications

E-mail: *valkhakhanian@gmail.com*

We consider the universe of sets for models for intuitionistic set theory from [1] and [2]. We proved that Uniformizatiom Principle (UP=$\forall x \exists n$ $\varphi(x,n) \to \exists n \forall x \varphi(x,n)$, where x is a set variable and n is a natural variable) is true in model from [1] and we cannot prove or disprove UP in model from [2] (the notions of realizability in these models are different only in two points).

We remind briefly and informally the definition of universe from [1] and [2]. Every set x from V is $x = \{< n, y >\}$, where y is already constructed set and n is a natural number. V=$\cup\{\mathrm{V}_\alpha | \alpha \in$Ord$\}$. $\mathrm{V}_\alpha = \cup\{\mathrm{V}_\beta | \beta \in \alpha\}$ if α is a limit ordinal. If $\alpha = \beta+1$ then we choose only such subsets of V_β which doesn't divide $\approx$ - equivalence relation. We say that $x \approx y$ iff $\{z | \exists n < n, z >\in x\} = \{z | \exists n < n, z >\in y\}$ and there exist two partial recursive functions (prf) f and g such that f reduce the set $\{n | \exists z < n, z >\in x\}$ to the set $\{n | \exists z < n, z >\in y\}$ and g make the same vice versa. We define the function of extensionality for every set from V (for details see [1] and [2]).

Main lemma. For every prf f there exist the set x from V so that the given f is not its function of extensionality.

Corollary 1. There does not exist prf f such as it is the extensionality function for every set from our universe V (instead V we can take V_α for $\alpha > \omega$).

Corollary 2. We use the Corollary 1 for extending of our result from [3] about independent UP from strong Church Thesis in intuitionististic set theory to the same theory but with the extensionality. We give the list of open problems from [3] and some accompanying results about relations CT, CT!,UP,UP!, some of which we are solving here.

ZFIC2+M+DCS+CT $\nvdash$ U
ZFIC2+M+DCS+U! $\nvdash$ U
ZFIC2+M+DCS+CT!+U $\nvdash$ CT
ZFIR2+CT! $\vdash$ U!

ZFIR2+U $\vdash$ U!
ZFIR2+CT $\vdash$ CT!
ZFIC2+M+DCS+U $\nvdash$ CT!
ZFIC2+M+DCS+U $\nvdash$ CT.

Remark. The theory ZFIC2 contains the scheme of collection but the theory ZFIR2 contains the scheme replacement. M is a Markov's Principle and UP! is $\forall x \exists ! n \varphi(x, n) \to \exists n \forall x \varphi(x, n)$ (compare with UP above).

Corollary 3. The models from [1] and [2] are different.

Open problem: ZFIC2 without the extensionality + CT $\nvdash$ UP!

References

[1] Khakhanian V. Set theory and Church Thesis. In book: Nonclassical logic and formal systems investigations. M., 1983, P.198-208 (in Russian).

[2] Khakhanian V. The consistency of intuitionistic set theory with principles Church and Uniformization. Vestnik of Moscow State University, Serie Mathematics and Mecanics, n.5, 1980, P. 5-7 (in Russian).

[3] Khakhanian V. Nonderivability uniformization from Church thesis in intuitionistic set theory. Mathematical Notes, v.43, issue 5, may 1988, P.685-991 (in Russian).

On Optimal Boundary Control of Non-Homogeneous String Vibrations under Impulsive Perturbations

A. Khurshudyan

Yerevan State University, Department of Mathematics and Mechanics.
E-mail: *AsaturKhurshudyan@yandex.ru*

Optimal control determining problem was considered for the wave equation [2-5]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T_0(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right]-\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t)+\sum_{k=1}^{n}P_k\cdot\delta\left(t-t_k\right),$$
$$x\in[0;l],\ t\in[t_0;T]\,, \quad (1)$$

with the following boundary and initial conditions

$$w(0,t)=0,\ w(l,t)=u(t),\ t\in[t_0;T]\,;\ w(x,t_0)=w_0(x),$$
$$\left.\frac{\partial w\left(x,t\right)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=w_1(x),\ x\in[0,l], \quad (2)$$

which provides for the function $w=w(x,t)$ necessary end-point conditions

$$w(x,T)=w_2(x),\ \left.\frac{\partial w\left(x,t\right)}{\partial t}\right|_{t=T}=w_3(x),\ x\in[0,l], \tag{3}$$

in the sense of control process optimality criterion

$$\kappa[u]=\int_{t_0}^{T}\left|u(t)\right|dt. \tag{4}$$

Let us note, that equation (1) is a linear model of the forced vibrations of a non-homogeneous string of length l and density $\rho(x)$ [2-5], under the influence of force $F(x,t)$ and impulsive forces $P_k\ \left(k=\overline{1;n}\right)$, applying on the string in discrete moments $t_k\in[t_0;T]\left(k=\overline{1;n}\right)$, at that, $T_0(x)$ is the tensile force and $w=w(x,t)$ is the bend of the string; $\delta(s)$ is Dirac's delta function.

Without losing the generality, it was assumed, that the boundary control $u(t)$ is a finite function with support $[t_0;T]$. Then, by means of finite control method [2], on the bases of (2) and (3), the solution of considered problem was reduced to the following system of trigonometric moments problems with respect to unknown function $u(t)$:

$$\int_{t_0}^{T} u(t)cos\left(\sigma_j t\right)dt = M_1\left(\sigma_j\right);$$
$$\int_{t_0}^{T} u(t)sin\left(\sigma_j t\right)dt = M_2\left(\sigma_j\right), \quad j = 0,1,2,... \quad (5)$$

$$M_1(\sigma) = \int_0^l A(x,\sigma)\cdot\frac{cos\varphi(x,\sigma)}{\varphi'(x,\sigma)}dx; \quad M_2(\sigma) = \int_0^l B(x,\sigma)\cdot\frac{cos\varphi(x,\sigma)}{\varphi'(x,\sigma)}dx,$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} P_k cos\sigma t_k + \int_0^l F(x,t)cos\sigma t dt +$$
$$\rho\left[w_3 cos\sigma T - w_1 cos\sigma t_0 + \sigma(w_2 sin\sigma T + w_0 sin\sigma t_0)\right],$$

$$B = \sum_{k=1}^{n} P_k sin\sigma t_k + \int_0^l F(x,t)sin\sigma t dt +$$
$$\rho\left[w_3 sin\sigma T - w_1 sin\sigma t_0 - \sigma(w_2 cos\sigma T + w_0 cos\sigma t_0)\right],$$

where the real function $\varphi = \varphi(x,\sigma)$ determining the oscillating solution of equation (1), satisfies the complex Riccati differential equation [5]: $T_0\psi' + \psi^2 + \rho T_0\sigma^2 = 0$, where $\psi = iT_0\varphi'$ and σ_j $(j = 0,1,2,...)$ are the roots of characteristic equation $\varphi(0,\sigma_j) = \frac{(2j+1)}{2}\pi$.

According to [6], the solution of moments problem (5) under criterion (4) was obtained in the following form:

$$u^o(t) = \sum_{i\in \mathrm{I}, j\in \mathrm{J}} u^o_{ij}\cdot\delta(t-\tau_{ij}),\ u^o_{ij} = (-1)^i\cdot\frac{M_1(\sigma_j)+M_2(\sigma_j)}{\sqrt{2}I\cdot cos(\theta_j-\frac{\pi}{4})};\ \tau_{ij} = \frac{\frac{\pi}{2}i-\theta_j}{\sigma_j}; \quad (6)$$

$\theta_j = arctg\frac{M_1(\sigma_j)}{M_2(\sigma_j)}$, where I and J$-$are sets of integer indexes i and j respectively, for which $\{\tau_{ij}\}_{i\in \mathrm{I}, j\in \mathrm{J}} \subset [t_0;T]$, $I = \max_{i\in \mathrm{I}} i$.

At the end let us note, that the necessary and sufficient condition for solvability of the system of moments problem, i.e. for controllability of (1) [6] is satisfied: $\sqrt{M_1^2(\sigma j) + M_2^2(\sigma j)} > 0$ for all $j \in$ J.

References.

[1] **L.N. Znamenskaya**, Control of Elastic Vibrations. M., FIZMATLIT, 2004. 176 p. (in Russian).

[2] **A.G. Butkovskii**, Control Methods for Systems with Distributed Parameters. M., Nauka, 1975. 568 p. (in Russian).

[3] **K.S. Khalina**, Controllability Problems for the Non-homogeneous String that is Fixed at the Right-end Point with Dirichlet Boundary Control at the Left-end point. Journal of Math. Phys., Anal. and Geom., 7:1 (2011). p. 34-58.

[4] **A.V. Borovskikh**, Boundary Control Formulas for Non-homogeneous String. I(II). Diff. Eq., 43:1(43:5) (2007). p. 64-89(p.640-649). (in Russian).

[5] **V. Barbu, N.H. Pavel**, Periodic Solutions of One-dimensional Wave Equation with $x-$dependent Coefficients. Trans. Amer. Math. Soc, 349:5 (1997). p. 2035-2048.

[6] **N.N. Krasovskii**, Motion Control Theory. M., Nauka, 1968. 476 p. (in Russian).

Об одном критерии неприводимости алгебры $C^*_\varphi(X)$

А.Ю. Кузнецова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
E-mail: *alla_kuznetsova@rambler.ru*

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ — отображение некоторого счетного множества в себя с ограниченной в совокупности мощностью прообразов.

Предположим, что на X отсутствуют циклические элементы, т.е. такие, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $\varphi^n(y) = y$.

Семейство функций $\{e_x\}_{x\in X}$, $e_x(y) = \delta_{x,y}$, образует естественный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве

$$l^2(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \sum_{x\in X} |f(x)|^2 < \infty\}.$$

Заданное на множестве X отображение индуцирует оператор $T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X)$; $\quad T_\varphi f = f \circ \varphi$. Этот оператор представляется линейной комбинацией операторов частичной изометрии, удовлетворяющих определенным соотношениям, $T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m$, где m — точная верхняя грань мощности прообраза под действием отображения φ.

Пусть $C^*_\varphi(X)$ — равномерно замкнутая C^*-подалгебра алгебры всех ограниченных операторов на $l^2(X)$, порожденная оператором T_φ (или семейством операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k=1}^m$).

Мономом V в алгебре $C^*_\varphi(X)$ назовем любое конечное произведение упомянутых выше операторов частичной изометрии и сопряженных к ним, не равное тождественно нулю.

Базисные элементы e_x и e_y назовем *эквивалентными*, если для любого монома V в алгебре $C^*_\varphi(X)$ $(Ve_x, e_x) = (Ve_y, e_y)$.

Теорема. *Для того, чтобы $C^*_\varphi(X)$ была приводима, необходимо и достаточно, чтобы на $l^2(X)$ существовало хотя бы два эквивалентных базисных элемента.*

Об общем решении уравнений в свободном моноиде

А.Ш. Малхасян

В работах [1, 2] доказаны разрешимость уравнений в свободном моноиде и в свободной группе, и решены многие другие сложные проблемы по теории уравнений в свободных моноидах и в свободных группах.

Однако, центральный вопрос – описание общего решения - находится в самом начале своего развития.

В работе [3], автора наиболее значительных результатов по уравнениям в свободных моноидах и в свободных группах Г.С. Маканина, было построено общее решение уравнения:

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$$

в свободном моноиде.

В настоящей работе строится общее решение уравнения вида

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n - 1} x_{i_n} = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ перестановка, полученная из перестановки $1, 2, \ldots, n$ записанной на круге, с помощью одной траспозиции соседних элементов.

Дано также геометрическое описание этого общего решения.

Список литературы

[1] Макинин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе. Мат. Сб., 1977, т.103(145), No 2(6), с.147-236.

[2] Макинин Г. С. Уравнения в свободных полугруппах. Изв. АН СССР, серт. Мат., 1982, т. 46, No 6, с. 1199-1273.

[3] Макинин Г. С. Параметризация решений уравнений $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ в свободном моноиде. Мат. Заметки, 2011, т. 89, No 6, с. 879-884.

Об одном классе гипоэллиптических относительно группы переменных многочленов

В.Н. Маргарян

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail:vachagan.margaryan@yahoo.com

Пусть N- множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n - множество n - мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in N_0, \quad j = 1, ..., n$, R^n - n- мерное вещественное эвклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $R_+^n \equiv \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$. Для $n, k \in N, k \leq n, \xi, x \in R^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\xi \equiv (\xi', \xi''), \quad \xi' \equiv (\xi_1, ..., \xi_k); \quad \xi'' \equiv (\xi_{k+1}, ..., \xi_n), |\xi| \equiv \equiv (\xi_1^2 + ... + \xi_n^2)^{1/2}, \quad \xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| \equiv \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \mathrm{\xi_j}}$ либо $D_j = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}$ $(j = 1, ..., n, i^2 = -1)$.

Пусть $P(\xi) = P((\xi_1, ..., \xi_n)) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ многочлен, где сумма распространяется по конечному набору $(P) \equiv \{\alpha \in N_0^n, \quad \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Характеристическим многогранником набора (P)(многочлена P) называется минимальный выпуклый многогранник $\Re(P) \subset R_+^n$ содержащий множество $(P) \cup \{0\}$.

Многогранник $\Re \subset R_+^n$ называется правильный (вполне правильный), если компоненты всех внешних (относительно $\Re$) нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней неотрицательны (положительны).

Для набора $(P) \subset N_0^n$, числа $k \in N \quad (k < n)$ и многогранника $\Re(P)$ через $\Re^0(P), \quad \Pi''(P), \quad \Pi''_j(P) \quad j = 1, ..., k, \quad \tilde{\Pi}''(P), \quad \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))), \quad \Lambda^+(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$ и $G(P)$ обозначим $\Re^0(P)$ - множество вершин многогранника $\Re(P)$

$$\Pi''(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \quad \exists \alpha' \in N_0^k \quad \alpha \equiv (\alpha', \alpha'') \in (P)\},$$

$$\Pi''_j(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \quad \exists \alpha' \in N_0^k, \quad \alpha_r = 0, \quad r = 1, ..., k; \quad r \neq j \\ \alpha \equiv (\alpha', \alpha'') \in (P)\}, \quad j = 1, ..., k,$$

$$\tilde{\Pi}''(P) \equiv \{(0', \alpha'') \in N_0^n, \quad \alpha'' \in \Pi''(P)\},$$

$\Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$ - множество единичных (внешних) нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней многогранника $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$

$$\Lambda^+(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))) \equiv \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))), \quad \lambda_j > 0, \\ j = 1, ..., n\},$$

$$G(P) \equiv \Re^0(P) \cap \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)).$$

Определение (см. [1]). Пусть $k, n \in N$ и $k < n$. Многочлен $P(\xi) = P((\xi_1, ..., \xi_n))$ называется гипоэллиптическим относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, если для любых $0 \neq \alpha \in N_0^n$ и последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$ при $s \to \infty$ $D^\alpha P(\xi^s)/P(\xi^s) \to 0$ как только $|(\xi')^s| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Доказана следующая:

Теорема. Пусть $2 \leq n \in N$ и для многочлена $P(\xi) = P((\xi_1, ..., \xi_n))$ с некоторой посотоянной $c > 0$

$$\sum_{\alpha \in G(P)} |\xi^\alpha| \leq c(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Многочлен P гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)(k \leq N, k < n)$ тогда и только тогда, когда

1) для любого $j : 1 \leq j \leq k \quad \Re(\Pi''_j(P)) = \Re(\Pi''(P)) \quad (\subset R_+^{n-k})$,

2) $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \subset R_+^n$ правильно,

3) $\Lambda^+(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))) \neq \emptyset$ и для любого $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$ $\lambda'' = (\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n) > 0$,

4) для любого $\alpha = (\alpha', \alpha'') \in (P), \quad \alpha' \neq 0$, многогранник $M(P, \alpha'') \equiv \equiv \{\nu' \in R_+^k, \quad (\nu', \alpha'') \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))\}$ вполне правильный.

[1] - R.J. Elliott "Almost hypoelliptic differential operators"Proc. of the London Math. Soc. V53-19 (3), 537 - 552, 1969

On the Turing completeness of one minimal set of built-in functions for functional programming languages

G.A. Martirosyan

Chair of Programming and Information Technologies, YSU
E-mail: *gevorg.martirosyan@gmail.com*

Keywords: functional programming language, built-in function, Turing completeness, minimality.

Many functional programming languages operate on *S-expressions*. The sets of built-in functions of those languages contain *car*, *cdr*, *cons*, *atom*, *eq*, *if_then_else* functions. It is shown that Turing computable functions defined on *S-expressions* can be presented in such functional programming languages which have *car*, *cdr*, *cons*, *atom*, *eq*, *if_then_else* built-in functions. In other words, if the set of built-in constants of a functional programming language contains all these functions, then that language is Turing complete. The following two results are obtained for the minimality of the set of built-in functions $\Phi = \{car, cdr, cons, atom, eq, if\_then\_else\}$.

1. Φ is minimal for functional programming languages which use more than two atoms.

2. The function *eq* is representable in a functional programming language which uses only two atoms and the set $\Phi \setminus \{eq\}$ of built-in functions; the set of built-in functions $\Phi \setminus \{eq\}$ is minimal for functional programming languages which use only two atoms and it is the only proper subset of the set Φ, which is minimal for such languages.

REFERENCES

1. S.A. Nigiyan, "Functional Languages", *Programming and Computer Software*, Vol. 17. pp. 290-297, 1992.

2. S.A. Nigiyan, "On interpretation of functional programming languages", *Programming and Computer Software*, Vol. 19. pp. 71-78, 1993.

3. L.E. Budaghyan, "Necessary and sufficient condition of completeness of computation rule for strongly typed functional programs", Proceedings of the Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT-2005), Yerevan, 2005, p. 16-19

О термунальных производных K-отображений

Н.Э. Мирзаханян

Непрерывное отображение $f : G \to H$, где G открытое подмножество гилбертова пространства H, является К-отображением, если выполнено условие (К), т.е. для любой точки $y \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки y, конечномерное подпространство $L \subset H$ и число λ такие, что если точки $a, b \in U$ и вектор $a - b$ ортогонален L, то $||f(a) - f(b) - \lambda(a - b)|| \leq \varepsilon||a - b||$. Важным характеризующим свойством К-отображений является тот факт, что фигурирующее в условиях (К) число λ можно выбрать так, чтобы оно зависело лишь от точки y, но не от числа $\varepsilon > 0$ (см. [1]); в результате строится заданная на G единственная непрерывная вещественная функция $\lambda(y)$, которая называется терминальной производной отображения f и обозначается через $\lambda_f(y)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $M \subset H$ множество, допускающее терминальные производные, $f : M \to H$ – К- отображение, а $X \subset M$ – такое компактное подмножество, на котором терминальная производная $\lambda_f(y)$ отображения f всюду отлична от нуля. Тогда существует конечномерное подпространство $L \subset H$ такое, что 1) если f на X постоянно, то ортопроектор $p : H \to L$ инъективен на X; 2) для каждой точки y ограничение f на подмножестве $X \cap H_y$ есть гомеоморфизм, где $H_y = y + L^{\perp}$, $L^{\perp}$ - ортогональное дополнение к L.*

Литература.

[1] Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян, О К 0 -парах Борсука в гильбертовом пространстве. Доклады НАН, (2004) т. 104, н.4.

Some conditions of convexity

R. Mkrtchyan

Yerevan State University

Let X be a linear metric space with metric ρ and F be a subset of X. The distance of the point x to the set F is defined as $\operatorname{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \rho(x, y)$. A point $y \in F$ is called a *projection* of x onto F if $\rho(x, y) = \operatorname{dist}(x, F)$. Obviously, if the set F is closed, then at least one projection exists.

The following assertion gives a sufficient condition the set F to be convex.

Theorem 1. Let X be a complete linear metric space, F be a closed subset of X. If each point of X has only one projection onto F then F is convex.

The main part of the proof is to establish the assertion in two-dimensional case (plane). The general case can be easily reduced to it.

It is not difficult to find convex sets in which there is more than one projection of a point.

In more stringent conditions the necessary and sufficient condition for convexity may be formulated.

Theorem 2. Let X be a complete finite dimensional linear metric space, F be a closed subset of X. The set F is convex if and only if for each $x \notin F$ there exists an affine hyperplane which separates the point x and the set F.

Interlaced q-bilattices

Yu.M.Movsisyan, D.S.Davidova

Department of mathematics and mechanics
Yerevan State University, Yerevan, Armenia

Introduction and preliminaries. Bilattices are the algebraic structures that were introduced by Ginsberg [1, 2] as a general and uniform framework for a diversity of applications in artificial intelligence. In a series of papers it was shown that these structures can serve as a foundation for many areas, such as logic programming [3-5], computational linguistics, distributive knowledge processing and reasoning with imprecise information.

A bilattice is the algebra, $(L; \wedge, \vee, *, \triangle)$, with four binary operations such that the following two reducts, $L_1 = (L; \wedge, \vee)$ and $L_2 = (L; *, \triangle)$, are lattices.

A bilattice is called interlaced if all the basic bilattice operations are order preserving with respect to the both corresponding orders.

In papers [1, 3, 5-9] bounded distributive or bounded interlaced bilattices are characterized (note that distributive lattices with third additional operation are studied in [10]-[13]). In [14], interlaced bilattices without bounds are characterized (see also [15]).

Definition 1. The algebra, $(L; \wedge)$, is called a q-semilattice, if it satisfies the following identities:

1. $a \wedge b = b \wedge a$ (commutativity);
2. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associativity);
3. $a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b$ (weak idempotency).

Definition 2. The algebra, $(L; \wedge, \vee)$, is called a q-lattice (see [16]), if the reducts, $(L; \wedge)$ and $(L; \vee)$, are q-semilattices and the following identities, $a \wedge (b \vee a) = a \wedge a$, $a \vee (b \wedge a) = a \vee a$ (weak absorption), $a \wedge a = a \vee a$ (equalization) are valid.

For each q-semilattice, $(L; \wedge)$, there exists a quasiorder, Q (i.e. a reflexive and transitive relation), which is defined in the following manner: $aQb \leftrightarrow a \wedge b = a \wedge a$. For each q-lattice, $(L; \wedge, \vee)$, we have: $aQb \leftrightarrow a \wedge b = a \wedge a \leftrightarrow a \vee b = b \vee b$.

For example, $(Z \setminus \{0\}; \wedge, \vee)$, where $x \wedge y = |(x, y)|$ and $x \vee y = |[x, y]|$ (here (x, y) and $[x, y]$ are the greatest common division (gcd) and the least common multiple (lcm) of x and y), is a q-lattice, since $x \bigwedge x \neq x$ and $x \bigvee x \neq x$.

Definition 3. A q-bilattice is an algebraic structure, $(L; \wedge, \vee, *, \triangle)$, with the two q-lattice reducts, $L_1 = (L; \wedge, \vee)$ and $L_2 = (L; *, \triangle)$, which also satisfies the following identity: $a * a = a \wedge a$ (the quasiorder of the first reduct, $(L; \wedge, \vee)$, is denoted by $\leq_\wedge$, and that of the second reduct - by $\leq_*$).

Definition 4. The operation, $*$, of the q-semilattice, $(L; *)$, is called interlaced with the operations, $\wedge$ and $\vee$, of the q-lattice, $(L; \wedge, \vee)$, if the q-semilattice operation, $*$, preserves the q-lattice quasiorder $\leq_\wedge$, and q-lattice operations, $\wedge$ and $\vee$, preserve the q-semilattice quasiorder $\leq_*$.

Definition 5. The q-bilattice, $(L; \wedge, \vee, *, \triangle)$, is called interlaced if all the basic q-bilattice operations are quasiorder preserving with respect to both quasiorders.

Let us recall that a hyperidentity is a second order formula of the following type:

$$\forall X_1, ..., X_m \ \forall x_1, ..., x_n (w_1 = w_2),$$

where $X_1, ..., X_m$ are functional variables, and $x_1, ..., x_n$ are objective variables in the words (terms) of $w_1,\ w_2$. Hyperidentities are usually written without the quantifiers, that is to say, $w_1 = w_2$. We say that in the algebra, $(Q; F)$, the hyperidentity, $w_1 = w_2$, is satisfied if this equality is valid, when every objective variable and every functional variable in it is replaced by any element of Q and by any operation of the corresponding arity from F respectively (supposing the possibility of such replacement)[17-18].

On characterization of hyperidentities of varieties of lattices, modular lattices, distributive lattices, Boolean and De Morgan algebras see [19-22]. About hyperidentities in term (polynomial) algebras of lattices see [23].

For example, the q-bilattice, $L = (L; \wedge, \vee, *, \triangle)$, is interlaced iff it satisfies the following hyperidentity:

$$X(Y(X(x, y), z), Y(y, z) = Y(X(x, y), z).$$

For a categorical definition of hyperidentities, in [17] the (bi) homomorphisms between the two algebras, $(Q; F)$ and $(Q'; F')$, are defined as the pair, $(\varphi, \widetilde{\psi})$, of the maps:

$$\varphi : Q \to Q',\ \widetilde{\psi} : F \to F', |A| = |\widetilde{\psi} A|,$$

with the following condition:

$$\varphi A(a_1, ..., a_n) = (\widetilde{\psi} A)(\varphi a_1, ..., \varphi a_n),$$

for any $A \in F, |A| = n,\ a_1, ..., a_n \in Q$.

Algebras with their (bi)homomorphisms, $(\varphi, \widetilde{\psi})$, (as morphisms) form a category with products. The product in this category is called superproduct of algebras and is denoted by $Q \bowtie Q'$ for the two algebras, Q and

Q'. For example, a superproduct of the two q-lattices, $Q(+,\cdot)$ and $Q'(+,\cdot)$, is the binary algebra, $Q\times Q'\left((+,+),(\cdot,\cdot),(+,\cdot),(\cdot,+)\right)$, with four binary operations, where the pairs of the operations operate componentwise, i.e.

$$(A,B)\left((x,y),(u,v)\right)=\left(A(x,u),B(y,v)\right),$$

and $Q\bowtie Q'$ is an interlaced q-bilattice.

On the main results

1.We characterized every interlaced q-bilattice with help of superproduct of two q-lattices.

2.We characterized every interlaced q-bilattice with help of superproduct of two lattices and the special epimorphisms.

References

[1] M. L.Ginsberg, Multi-valued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence, Computational intelligence, 1988, v.4, p. 265-316.

[2] M. L.Ginsberg, Multi-valued logics, Proc. AAA-186, fifth national conference on artificial intelligence, Morgan Kaufman Pablishers, 1986, p. 243-247.

[3] M.C.Fitting, Bilattices in logic programming, in: G.Epstain ed., proc 20th Internat. Symp. on Multiple-Valued Logic, IEEE, New York, 1990, p. 63-70.

[4] M.C.Fitting, Bilattices and the semantics of logic programming, Journal of logic programming, 1991, v.11, p. 91-116.

[5] B.Mobasher, D.Pigozzi, G.Slutski, Multi-valued logic programming semantics. An algebraic approach, Theoretical Computer Science, 1997, v.171, p.77-109.

[6] A.B. Romanowska, A.Trakul, On the structure of some bilattices, Universal and Applied Algebra, World Scientific, 1989, p. 235-253.

[7] A.Avron, The structure of interlaced bilattices, Math. Struct. In Comp. Science, Cambridge University Press., 1996, v.6, p.287-289.

[8] A.P.Pynko, Regular bilattices, Journal of Applied Non-Classical Logics, 10 (2002), 93-111.

[9] G.Gargov, Knowlleage, Uncertainty and ignorance in logic:Bilattices and beyond, Journal of Applied Non-Classical Logics, vol.9, 1999, 195-283.

[10] S.A.Kiss, Transformations of lattices and structure of logic, Steven&Co., New-York, 1947.

[11] B.H.Arnold, Distributive lattices with a third operation defined, Pacific J. Math., 1(1951),33-41.

[12] J.Jakubik, M.Kolibiar, About some properties of structure pairs, The Chechoslovak Mat. Journal 4(79) (1954), 1-27 .

[13] J.Jakubik, M.Kolibiar, Latticies with a third distributive operation, Math. Slovaca, 3(1977), 287-292.

[14] Yu.M.Movsisyan, A.B.Romanowska, J.D.H Smith, Superproducts, hyperidentities, and algebraic structures of logic programming, Comb. Math. And Comb. Comp, 2006, v.58, p.101-111.

[15] Yu.M.Movsisyan, Bilattices and hyperidentities , Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,2011, Vol. 274, pp. 174-192.

[16] I.Chajda, Lattices in quasiordered sets, Acta Polacky University, Olomouc, 1992, 31, p. 6-12.

[17] Yu.M.Movsisyan, Introduction to the theory of algebras with hyperidentities, Yerevan State University Press, Yerevan, 1986 (Russian).

[18] Yu.M.Movsisyan, Hyperidentities and hypervarieties in algebras, Yerevan State University Press, Yerevan, 1990 (Russian).

[19] Yu.M.Movsisyan, Hyperidentities in algebras and varieties, Uspekhi Mat. Nauk, 1998,v.53, N 1, p. 61-114. English transl. in Russ. Math. Surveys, 1998, v.53, 57-108.

[20] Yu. M.Movsisyan, Hyperidentities of Boolean algebras, Izv.Ross.Acad.Nauk, Ser. Mat., 1992, v.56, p.654-672. English transl. in Russ.Acad. Sci Izv. Math., 1992, v.40, 607-622.

[21] Yu.M.Movsisyan, Algebras with hyperidentities of the variety of Boolean algebras, Izv.Ross.Acad.Nauk, Ser. Mat., 1996, v.60, p. 127-168. English transl. in Russ.Acad. Sci Izv. Math., 1996, v.60. 1219-1260.

[22] Yu.M.Movsisyan, V.A.Aslanyan, Hyperidentities of De Morgan algebras, *Logic Journal of IGPL 2012*; doi:10.1093/jigpal/jzr053.

[23] R.Padamanabhan, P.Penner, A hyperbase for binary lattice hyperidentities, Journal of Automated Reasoning 24(2000),365-370.

On functional equations in problems of description of random fields' specifications

B.S. Nahapetian and G.T. Horomyan

Institute of Mathematics of NAS RA
Russian-Armenian (Slavonic) University

The notion of specification as a consistent system of finite-dimensional distributions, parameterized by infinite boundary conditions was first introduced by R. Dobrushin in his fundamental work [1]. This work was dedicated to the problem of existence and uniqueness of a random field with given conditional distribution.

There was a certain disharmony in conditions of existence and uniqueness obtained by R. Dobrushin. In case of existence problem, conditions were set on the whole specification, while in case of uniqueness problem, conditions were set on a part of specification consisting of one-point distributions only. In order to eliminate this disharmony, R. Dobrushin formulated the following problem.

Given one-point distributions, parameterized with infinite boundary conditions, it was needed to find consistency conditions, such that the system of those distributions would become a subsystem of a specification. This problem was solved in works [2], [3], where necessary and sufficient consistency conditions were found. Despite the fact that obtained conditions are set on pure probabilistic object, their formulation has an algebraic interpretation too. In fact, they are existence and uniqueness conditions of a solution of infinite linear equations system.

In this talk we will present the basic facts of the mentioned algebraic approach.

First of all, let us note that the problem of reconstruction of the whole specification from its one-point subsystem can be reduced to the solution of the following functional equation

$$a_{\bar{x}} = A\left(\bar{x}, \bar{y}\right) a_{\bar{y}}, \quad \bar{x}, \bar{y} \in X^{\Lambda}, \tag{*}$$

$$\Lambda \subset Z^{d}, |\Lambda| < \infty \quad and \quad X^{\Lambda} = \left\{x_t, t \in \Lambda\right\}, x_t \in X, |X| < \infty$$

Assertion 1. *There exists a solution of the equation (*) if and only if for all $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in X^{\Lambda}$ the following equality is fulfilled*

$$A\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = A\left(\bar{x}, \bar{z}\right) A\left(\bar{z}, \bar{y}\right) \tag{**}$$

Furthermore, under the condition (**) the solution of equation (*) will have the following form

$$a_{\bar{x}} = A(\bar{x}, \bar{z_0})\, C(\bar{z_0}), \quad \bar{x} \in X^{\Lambda}, \bar{z_0} \in X^{\Lambda}.$$

Let us suppose that the following additional condition is taking place

$$\sum_{\bar{x} \in X^{\Lambda}} a_{\bar{x}} = 1$$

In this case the solution will be unique and written in the following form

$$a_{\bar{x}} = \frac{A(\bar{x}, \bar{z_0})}{\sum_{\bar{y}} A(\bar{y}, \bar{z_0})}, \quad \bar{x} \in X^{\Lambda}, \bar{z_0} \in X^{\Lambda}.$$

Particularly, if $A(\bar{x}, \bar{z_0}) = \frac{e^{U(\bar{x})}}{e^{U(\bar{z_0})}}$, then we will get the Gibbsian form of the solution of equation (*) [4]

$$a_{\bar{x}} = \frac{e^{U(\bar{x})}}{\sum_{\bar{y}} e^{U(\bar{y})}}, \quad \bar{x} \in X^{\Lambda}.$$

The main question is how and under what terms one can describe the class of functions satisfying the equality (**). Let us note that from (**) it follows, that function $A(\bar{x}, \bar{y})$ should possess the following properties:

1. $A(\bar{x}, \bar{x}) = 1$,
2. $A(\bar{x}, \bar{y})\, A(\bar{y}, \bar{x}) = 1$, and generally,
   if there is given a sequence of $\bar{y_1}, \bar{y_2}, \ldots, \bar{y_n} \in X^{\Lambda}$ vectors, then

$$A(\bar{x}, \bar{y_1})\, A(\bar{y_1}, \bar{y_2}), A(\bar{y}_{n-1}, \bar{y_n})\, A(\bar{y_n}, \bar{x}) = 1$$

Let function $A^*(\bar{x}, \bar{y})$ be defined on pairs of vectors $\bar{x}, \bar{y} \in X^{\Lambda}$ which differ in one point only. According to the problem of specifications recovery, considered in articles [2], [3], it is sufficient to find conditions under which the function $A^*(\bar{x}, \bar{y})$ can be continued on the whole space of $X^{\Lambda} \times X^{\Lambda}$

Theorem 1. *There exists a continuation of function $A^*(\bar{x}, \bar{y})$ on the space $X^{\Lambda} \times X^{\Lambda}$ if and only if for all $t, s \in Z^d$ the following condition is fulfilled*

$$A\left(\bar{x}, D_u^{(t)}\bar{x}\right) A\left(D_u^{(t)}\bar{x}, D_v^{(s)} D_u^{(t)}\bar{x}\right) = A\left(\bar{x}, D_v^{(s)}\bar{x}\right) A\left(D_v^{(s)}\bar{x}, D_u^{(t)} D_v^{(s)}\bar{x}\right)$$

where: $u, v \in X, \quad D_a^{(p)}\bar{x} = \left\{a, \bar{x}_{\Lambda \backslash p}\right\}, \quad p \in \Lambda, a \in X.$

References

[1] R. L. Dobrushin, *"The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity"*, (Russian) Teor. Verojatnost. i Primenen 13, 201-229 (1968).

[2] S. Yu. Dashyan, B. S. Nahapetian, *"Description of random fields by means of one-point conditional distributions and some applications"*, Markov Process. Related Fields, 7(2), 193-214 (2001).

[3] S. Yu. Dashyan, B. S. Nahapetian, *"Description of specifications by means of probability distributions in small volumes under condition of very weak positivity"*, J. Statist. Phys., 117 (1-2), 281-300 (2004).

[4] R. L. Dobrushin, *"Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions"*, (Russian) Funktsional. Analiz i Ego Prilozhen. 2 No. 4, 31-43 (1968).

The Martingale Method in the Theory of Random Fields

B.S. Nahapetian, L.A. Khachatrian

Institute of Mathematics of the NAS RA, Russian-Armenian (Slavonic) University

The martingale method widely uses in the theory of stochastic processes, but it still does not sufficiently claim in multidimensional problems and particularly in the theory of random fields.

The difficulties of applying this method to multidimensional problems first of all are caused by the fact that the notion of a martingale is essentially based on the real line completely ordering property, while the spatial structures do not have this property. In connection with it in multidimensional problems one has to consider random objects, parameterized by subsets of the space, and it is required that martingale property be fulfilled with respect to monotone sequences of subsets. There are various approaches of defining multidimensional martingale that allow to extend known limit theorems to respective classes of martingales (see [1] —- [4]). In this context question of extending the classes of martingales for which the basic facts of the classical theory of limit theorems hold is quite important. One of such classes is the class of martingale-difference random fields introduced in [5] (see also [6] —- [8]).

In this report a general method for constructing a martingale-difference random fields (including the constructing of Gibbs martingale-difference random fields) is produced, and also we discuss a method for proving limit theorems, that based on the reduction the proof to the corresponding limit theorem for martingale-difference random fields.

Let us introduce some results.

Let $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ be a d-dimensional integer lattice. We say that a random field ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ is a martingale-difference random field if for any $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M\left|\xi_t\right| < \infty \qquad \text{and} \qquad M\left(\xi_t / \xi_s, s \in \mathbb{Z}^d \backslash t\right) = 0 \qquad \text{a.s.}$$

Here $M\left(\xi_t / \xi_s, s \in \mathbb{Z}^d \backslash t\right)$ is the conditional expectation of ξ_t with respect to σ -algebra, generated by random variables ξ_s , $s \in \mathbb{Z}^d \backslash t$, $t \in \mathbb{Z}^d$.

Let $X, Y \subset R^1$ be finite sets and let $\varphi : Y \to X$ be some map. Let $\varphi^{-1}(x) = \{y \in Y : \varphi(y) = x\}$ be the set of counter images of $x, x \in X$.

Theorem 1. Let ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ be a random field taking values in X. Then there exist a random field η_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ taking values in Y, such, that $\xi_t = \varphi(\eta_t)$, $t \in \mathbb{Z}^d$.

A random field η_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ for that $\xi_t = \varphi(\eta_t)$, $t \in \mathbb{Z}^d$ we shall call **associated** with the random field ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$.

Theorem 2. Let $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d$ be a random field taking values in X, let $\eta_t, t \in \mathbb{Z}^d$ be a random field taking values in Y, and let $\eta_t, t \in \mathbb{Z}^d$ be associated with the random field $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d$. If map φ and set Y fulfill the following condition

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(x)} y = 0 \qquad \text{for all } x \in X,$$

then $\eta_t, t \in \mathbb{Z}^d$ is a martingale-difference random field.

Theorem 3. Let $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d$ be a Gibbs random field. Then the random field $\eta_t, t \in \mathbb{Z}^d$, associated with random field $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d$, is also a Gibbs random field.

References

[1] Chow Y. S., Martingales in a finite measure space indexed by directed sets. Trans. Amer. Math. Soc. 97, 254-286, 1960

[2] Krikeberg K., Convergence of martingales with directed index set. Trans. Amer. Math. Soc. 83, 313-337 (1956)

[3] Cairoly R.,Walsh J., Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134, 111-183, 1975

[4] Dvoretsky A., Asymptotic normality for sums of dependent random variables. In: Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab. vol.2, 513-535: Univ. California Press, 1972

[5] Nahapetyan, B.S., Petrosyan, A.N.: Martingal-difference Gibbs random fields and central limit theorem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math., Vol. 17, 1992

[6] B. Nahapetian, Billingsley-Ibragimov Theorem for martingale–difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics. C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 320, 1995

[7] B. Nahapetian Models with even potential and the behaviour of total spin at the critical point. Commun. Math. Phys. 1997, 189, 513 - 519

[8] L.A. Khachatryan, Associated martingale-difference random fields (in Russian). Collection of scientific papers (physico-mathematical sciences) of the fourth annual conference of RAU, 2009

Decay of correlations. Abstract approach.

S. Poghosyan

Institute of Mathematics, NAS RA

E-mail: *suren.poghosyan@unicam.it*

Estimates of semi-invariants give an effective description of the decay of correlations in statistical mechanics This talk presents different bounds of two-point semi-invariants in abstract setting which can be applied to classical and quantum continuous systems.

Let $\mathcal{X}$ be a Polish space, $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{B}_0$ denote the Borel resp. bounded Borel sets. Let μ be some (signed) Radon measure on $\mathcal{X}$.

Let u and q be complex measurable symmetric functions on $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, that are related by the equation

$$q(x, y) = e^{-u(x,y)} - 1.$$

We need the following assumptions

A1. *(Stability)* There exists a nonnegative function b on $\mathcal{X}$ such that, for all n

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \left|1 + q(x_i, x_j)\right| \le \prod_{i=1}^{n} e^{b(x_i)} \quad \mu^{\otimes^n} - a.s.[x_1, \cdots, x_n].$$

A2. *(Regularity)* There exists a nonnegative function a on $\mathcal{X}$ such that for almost all $x \in \mathcal{X}$,

$$\int \mathrm{d}|\mu|(y)\, |q(x, y)| e^{a(y)+2b(y)} \le a(x) \quad \mu - a.s.[x].$$

We also suppose that $\int \mathrm{d}|\mu|(y)\, e^{a(y)+2b(y)} < \infty$.

Let $\mathcal{C}_n$ be the set of all unoriented connected graphs with n vertices. We introduce the following combinatorial function on finite sequences $(x_1, \ldots, x_n)$ of elements of $\mathcal{X}$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ \sum_{G \in \mathcal{C}_n} \prod_{\{i,j\} \in G} q(x_i, x_j) & \text{if } n \ge 2. \end{cases}$$

The product is over edges of G.

We define the two-point semi-invariant by

$$\sigma(x,y)=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n-2)!}\int \mathrm{d}\mu(x_1)\ldots\int \mathrm{d}\mu(x_{n-2})\,\varphi(x,y,x_1,\ldots,x_{n-2}).$$

Theorem 1. *Suppose that **A1** and **A2** hold true. Then the function $\sigma(x,y)$ is correctly defined and*

$$|\sigma(x,y)|\leq e^{a(y)+2b(y)}\sum_{m\geq 0}\int \mathrm{d}|\mu|(x_1)\ldots\int \mathrm{d}|\mu|(x_m)\times \prod_{i=0}^{m}|q(x_i,x_{i+1})|e^{a(x_i)+2b(x_i)}$$

with $x_0\equiv x$ and $x_{m+1}\equiv y$.

To get an integral estimate of $|\sigma(x,y)|$ we replace **A2** by a stronger condition.

A3. There exists a nonnegative function a on $\mathbb{X}$ and a number p, $0<p<1$, such that for almost all $x\in\mathcal{X}(B_0(R))$,

$$\int_{\mathbb{X}}\mathrm{d}|\mu|(y)\,|q(x,y)|e^{a(y)+2b(y)}\hat{a}(y)\leq p\,a(x)$$

where $\hat{a}(x)=\max(a(x),1)$.

Theorem 2. *If Assumptions 1 and 3 hold true, we have for almost all $x\in\mathbb{X}$,*

$$\int_{\mathbb{X}}\mathrm{d}|\mu|(y)|\sigma(x,y)|\leq e^{a(x)+2b(x)}a(x)\frac{p}{1-p}.$$

We apply these results to get an estimate of the two-point truncated correlation functions of the system of interacting Brownian loops.

Об одном тождестве в весовых класах целых функций

С.Г. Рафаелян

ЕГУ
E-mail: rafayelyansg@mail.ru

Пусть $p > 1$ и $w \in A_p$-вес Макенхаупта. Обозначим через $W_\sigma^p(wdx)$ $(\sigma > 0)$ пространство целых функций $f(z)$ экспотенциального типа с нормой

$$\int_R |f(x)|^p w(x)\,dx = \|f\|^p < +\infty$$

Имеет место

Теорема 1. Пространство $W_\sigma^p(wdx)$ совпадает с пространством целых функций f, удавлетворяющих условиям

$$f(z)\,e^{\pm i\sigma z} \in H_p^{\pm}(wdx)$$

Где $H_p^{\pm}(wdx)$-весовые пространства Харди соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im} z > 0$ и $\mathrm{Im} z < 0$.

2. Для $f \in W_\sigma^p(wdx)$ имеет место тождество

$$f(z) = \int_R f(t)\frac{\sin\sigma(t-z)}{\sigma(t-z)}dt, z \in C.$$

About oscillation one-dimentional Dirac's system.

G.G. Sahakyan

Artsakh State University, Armenia
E-mail: *ter_saak_george@mail.ru*

We consider the next one-dimentional Dirac's system

$$\begin{cases} \quad y_2' + p(t)y_1 = \lambda y_1, \\ -y_1' + r(t)y_2 = \lambda y_2, \end{cases} \tag{1}$$

where $p(t), r(t)$ are real-valued functions, defined and continuous on interval $[a,b]$, and λ is real parameter.

Definition 1. The nontrivial solution $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ of system (1)is called *oscillatory*, if each of its components has at least two zeros in $[a,b]$.

Definition 2. The system (1)is called *oscillatory* if it has at least one oscillatory solution, in otherwise it is called *non-oscillatory*.

Let

$$R_1 = \min_{a\le t\le b} r(t), \quad R_2 = \max_{a\le t\le b} r(t), \quad P_1 = \min_{a\le t\le b} p(t), \quad P_2 = \max_{a\le t\le b} p(t),$$

$$M = max\{R_2, P_2\}, \qquad m = min\{R_1, P_1\}.$$

The main result of research is contained in the following theorem.

Theorem. *For values of parameter λ, which satisfies $\lambda > M + \frac{\pi}{b-a}$ or $\lambda < m - \frac{\pi}{b-a}$ conditions, the system* (1) *is oscillatory on interval* $[a,b]$.

On parametric representations of certain new classes of functions in the unit disk

R.F. Shamoyan

Department of Mathematics,Bryansk State Technical University,
Bryansk 241050, Russia.
E-mail: *rshamoyan@gmail.com*

Assuming that $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ is the unit disk of the finite complex plane $\mathbb{C}$, T is the boundary of $\mathbb{D}$ and $SH(\mathbb{D})$ is the space of all functions subharmonic in $\mathbb{D}$, introduce the following classes of functions:

$$S_\alpha^\infty = \Big\{ f \in SH(\mathbb{D}) : T(\tau, f) \leq C_f (1-\tau)^{-\alpha}, \ \ 0 \leq \tau < 1 \Big\}, \quad \alpha \geq 0$$

where $T(\tau, f)$ is a Nevanlinna's characteristic of subharmonic function

$$T(\tau, f) = \frac{1}{2\pi} \int_T f^+(r\tau) d\tau$$

$z = r\tau$,$0 < r < 1$,$f^+(z) = \max(f(z), 0)$ (see eg.[3]). It is obvious that if $\alpha = 0$, then $S_0^\infty = S$, where S is the well-known Nevanlinna's class of subharmonic functions in the unit disk. The following statement holds by Nevanlinna's classical result on the parametric representation of S (see eg. [3]) and it serves (see [3]) as a base of all theory of subharmonic functions of area Nevanlinna type spaces.

The S class coincides with the set of functions representable in the unit disk on a complex plane in the following form

$$u(z) = \int_{\mathbb{D}} G(\tau, z) d\mu(\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{(1-|z|^2)}{|1 - \exp(-i\tau) z|^2} d\psi(\tau)$$

where ψ is a function of bounded variation on T , μ is a positive Borel measure in unit disk satisfiyng the following condition $\int_{\mathbb{D}} (1-|w|) d\mu(w) < \infty$, and finnaly $G(\tau, z) = log \frac{(\tau - z)}{(1-\tau z)}$ The main goal of this paper is to obtain an analogue of this theorem for certain new large classes of subharmonic functions which we will define below.For formulations of our main results we will need the following basic definition which is crucial for this note. Let $\beta > -1$,$z \in D$,$\tau \in D$,and τ is not zero. Then we put (see [1])

$$A_\beta(z, \tau) = (1 - z(\tau)^{-1}) \exp\left\{ -\frac{\beta}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \log|1 - t(\tau)^{-1}| B(t, z) dm_2(t) \right\}$$

where $B(t,z)$ is well-known Bergman kernel (see [1]) This is just one factor in a well-known infinite Djrbashyan product $\Pi(z,z_k)$ [1] which plays very important role in these issues. (see [1] and various references there.) We denote as usual by $dm_2(z)$ the normalized Lebesgues measure in the unit disk on the complex plane.Let further

$$S^p_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in SH(\mathbb{D}) : \int_0^1 \left[\int_0^R T(f,|z|)(1-|z|)^\alpha dm_2(z) \right]^p (1-R)^\beta dR < +\infty \right\},$$

$$S^{\infty,p}_{\alpha,\beta_1} = \left\{ f \in SH(\mathbb{D}) : \sup_{0 \le R < 1} \left[\int_0^R T^p(f,|z|)|(1-|z|)^\alpha dm_2(z) \right] \times (1-R)^{\beta_1} < +\infty \right\},$$

where it is assumed that $\beta_1 \ge 0$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ and $0 < p < \infty$.

In this section we give concrete solutions of mentioned problems in defined above large subharmonic area Nevanlinna type classes in the unit disk .

We provide complete analogues of assertion about S above and assertions from [2] and [4].From one hand we expand a result from our just mentioned paper to the case of all subharmnic functions from the other hand we extend the main result from [4] on parametric representation of S^∞_α space of subharmonic functions to larger spaces of subharmonic functions in the unit disk. First we formulate a result from [4] which extend the Nevanlinna"s theorem we formulated above to weighted case. Below by $B^{p,q}_s(T)$ we denote standard Besov space on a unit circle (see for example [1]) where p and q are positive and less or equal ∞,$s \in (0,\infty)$

Theorem A *The S^∞_α class coincide with the space of u functions which allows the following representation in unit disk $\mathbb{D}$*

$$u(z) = \int_{\mathbb{D}} \log|A_\beta(z,\tau)|d\mu(\tau) + Rec \int_T \frac{\psi(\tau)}{K(\tau,z)} d\tau$$

,where $K(t,z) = (1 - z\exp^{it})^{\beta+1}$ where z belong to unit disk $\mathbb{D}$ and the function ψ is from Besov space on a unit circle T,namely from $B^{1,\infty}_{\beta-\alpha+1}(T)$, $\beta > \alpha-1$ and the μ is a positive Borel measure in the unit disk $\mathbb{D}$ for which the following condition holds $n(r) < \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}}$,$n(r) = \mu(D_r)$,$r \in (0,1)$ and in addition $c = \frac{1}{2\pi}$.

Theorem 1. *The $S^{p,\infty}_{\alpha,\beta}$ class coincides with space of u functions which allows the following parametric represenatation in the unit disk $\mathbb{D}$*

$$u(z) = \int_{\mathbb{D}} \log |A_s(z,\tau)| d\mu(\tau) + h(z)$$

where $\beta > 0$,$\alpha > -1$,$p \in (0,\infty)$,$z \in \mathbb{D}$,and $s \in (s_0,\infty)$ for some fixed positive s_0, h is an harmonic function in the unit disk ,μ is a positive Borel measure in the unit disk so that $n(\tau) < c(1-\tau)^{-1-p-\alpha-\beta}$ and where $\tau \in (0,1)$,$n(r) = \mu(D_r)$,$D_r = \{z : |z| < r\}$,$r \in (0,1)$ and the h function satisfies the following condition,$\ln^+ |h| \in S^p_{\alpha,\beta}$,$|h| = |h(z)|$

Theorem 2. *The $S^p_{\alpha,\beta}$ class coincides with the space of u functions which allows the following parametric representation in the unit disk $\mathbb{D}$*

$$u(z) = \int_{\mathbb{D}} \log |A_s(z,\tau)| d\mu(\tau) + h(z)$$

where $p \in (0,\infty)$,$\alpha > -1$,$\beta > -1$,$z \in \mathbb{D}$,and $s \in (s_0,\infty)$,for some positive fixed s_0, h is an harmonic function in the unit disk, and μ is a positive Borel measure in the unit disk so that $\int_0^1 n(r)^p (1-r)^{\alpha p+\beta+2p} dr < \infty$ and the h function satisfies the following condition $ln^+|h| \in S^p_{\alpha,\beta}$,$|h| = |h(z)|$

Proofs of assertions we formulated above follows the same strategy as in paper [4] but with more delicate estimates in proofs.Some estimates from [2] will be used on that way.We note the complete proofs of these assertions with other related results on area Nevanlinna spaces will be presented elsewhere in a separate complete paper.

References

[1] M.Djrbashian,F.Shamoyan,Topics in the theory of A^p_α spaces, Leipzig, Teubner-Texte zur Mathematik, v.105,1988.

[2] R. Shamoyan, H.Li, Characterizations of closed ideals and main parts of some analytic and meromorphic classes of area Nevanlinna type in the unit disk, International Journal of Mathematics and Statistics,v.10,2011,109-121.

[3] W.K.Hayman,P.B.Kennedy,Subharmonic functions,London Mathematical Society Monographs,London-New-York,Academic Press,1989,512p.

[4] O.Ochlupina,On characterization of certain spaces of subharmonic functions in the unit disk having certain growth near boundary of the unit disk,Vesnik BGU, Bryansk State University,2009,61-72 (in Russian)

On integral operators and projections on harmonic mixed norm spaces on the unit ball of $\mathbb{R}^n$

Y. Tonoyan

Yerevan State University.
E-mail: *etonoyan@ysu.am*

Let $B = B_n$ $(n \geq 2)$ be the unit ball in $\mathbb{R}^n$, and $S = \partial B$ be its boundary, the unit sphere. Integral means of order p of a harmonic function $u(x) = u(r\zeta)$ on the sphere $|x| = r$ are denoted by

$$M_p(u;r) = \big\|u(r\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}, \qquad 0 \leq r < 1,\ 0 < p \leq \infty,$$

where $d\sigma$ is the normalized $(n-1)$-dimensional surface measure on S. Also let dV denote the normalized volume measure on B, $dV(x) = n\, r^{n-1} dr d\sigma(\zeta)$. Let $h(B)$ be the set of (real-valued) harmonic functions in B. The quasi-normed space $L(p,q,\alpha)\big(0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}\big)$ is the set of those functions $u(x)$ measurable in B, for which the quasi-norm

$$\|u\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(u;r) dr\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(u;r), & q = \infty, \end{cases}$$

is finite. For the subspace of $L(p,q,\alpha)$ consisting of harmonic functions let $h(p,q,\alpha) = h(B) \cap L(p,q,\alpha)$. For $p = q < \infty$, the spaces $h(p,q,\alpha)$ coincide with weighted Bergman spaces, and for $q = \infty$, they are usually called weighted Hardy spaces. Mixed norm spaces of holomorphic functions were introduced by Hardy and Littlewood ([1],[2],[3]). For $1 \leq p, q \leq \infty$, $h(p,q,\alpha)$ are Banach spaces equipped with the norm $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$, while for $0 < p < 1$ or $0 < q < 1$, $h(p,q,\alpha)$ are complete metric spaces with invariant metric $d(u,v) = \|u-v\|_{p,q,\alpha}^{\min\{p,q\}}$ and quasi-norm $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$.

We need the weighted Bergman kernel K_α for the ball B,

$$K_\alpha(x,y) = \frac{2}{n\,\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)}\, Z_k(x,y), \quad x, y \in B, \quad \alpha > 0,$$

where $Z_k(x,y)$ are extended zonal harmonics [4].

Our first theorem establishes a reproducing integral formula of Poisson–Bergman type for functions in $h(p,q,\alpha)$.

Theorem 1. Let $\alpha > 0$ and $u(x) \in h(p,q,\alpha)$ be an arbitrary function. If either $0 < p,q \leq \infty$, $\beta > \max\{\alpha + (n-1)/p - 1,\, \alpha\}$, or $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq 1$, $\beta \geq \alpha$, then

$$u(x) = \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\, K_\beta(x,y)\, u(y)\, dV(y), \qquad x \in B.$$

This representation induces linear integral operators of Bergman type:

$$T_{\beta,\lambda}(f)(x) = (1-|x|^2)^\lambda \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\, K_{\beta+\lambda}(x,y)\, f(y)\, dV(y).$$

It is natural to ask whether these operators are bounded in mixed norm spaces.

Theorem 2. (i) If $1 \leq p,q \leq \infty$, $\beta > \alpha > -\lambda$, then the operator $T_{\beta,\lambda}$ continuously maps the space $L(p,q,\alpha)$ into itself. Moreover, the operator $T_{\beta,0}$ projects $L(p,q,\alpha)$ onto $h(p,q,\alpha)$.

(ii) If $1 \leq p,q < \infty$, $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, then the operator $T_{\beta,\lambda}$ is bounded in $L(p,q,\alpha)$ if and only if $\beta > \alpha > -\lambda$.

1. G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Some properties of fractional integrals (II), *Math. Zeit.*, **34**, 403–439 (1932).

2. G.H. Hardy and J.E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, *Quart. J. Math. (Oxford)*, **12**, 221–256 (1941).

3. P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, London (1970).

4. S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, New York (2001).

On homoclinic solutions of semilinear $p-$Laplacian difference equations

S. Tersian

University of Ruse, 8 Studentska, 7017 Ruse, Bulgaria
E-mail: *sterzian@uni-ruse.bg*

We consider the semilinear eigenvalue p-Laplacian difference equation

$$\Delta_p^2 u(k-1) - V(k)\, u(k)\, |u(k)|^{q-2} + \lambda f(k, u(k)) = 0, \tag{1}$$

and looking for its homoclinic solutions, i.e., solutions of Eq.(1) such that $u(k) \to 0$ as $|k| \to \infty$. Here $\lambda > 0$, $\{u(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ is a sequence or real numbers, Δ is the difference operator $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$,

$$\Delta_p^2 u(k-1) = \Delta u(k)\, |\Delta u(k)|^{p-2} - \Delta u(k-1)\, |\Delta u(k-1)|^{p-2}$$

is referred as the p-Laplacian difference operator.

Suppose that functions $V(k)$ and $f(k,t)$ satisfy assumptions:

$$V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \text{ is a } T\text{-periodic positive potential,} \tag{2}$$

$$0 < V_0 = \min\{V(0), \dots, V(T-1)\}. \tag{3}$$

(F_1) The function $f(k,t)$ is continuous in $t \in \mathbb{R}$ and T-periodic in k,

and the potential function $F(k,t)$ of $f(k,t)$, $F(k,t) = \int\limits_0^t f(k,s)\,ds$ satisfies the Rabinowitz's type condition

(F_2) There exist $\mu > p \geq q > 1$ and $s > 0$ such that

$$\mu F(k,t) \leq t f(k,t), \; k \in \mathbb{Z}, \; t \neq 0$$
$$\text{and } F(k,t) > 0, \; \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ for } t \geq s > 0.$$

and

(F_3) $f(k,t) = o\left(|t|^{q-1}\right)$ as $|t| \to 0$.

Our main result, published in [2] is the following

Theorem 1. *Suppose that the function* $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *and the functions* $f(k, \cdot) : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfy (2), (3) and* (F_1)*-*(F_3)*. Then, for each* $\lambda > 0$*, the equation (1) has a nonzero homoclinic solution* $u \in \ell^q$*. Moreover, given a nontrivial solution* u *of problem (1), there exist two integer numbers* $k_\pm$*, such that for all* $k > k_+$ *and* $k < k_-$*, the sequence* $u(k)$ *is strictly monotone.*

In order to prove the theorem we use variational approach and Brezis-Nirenberg mountain pass theorem [1]. Three examples of equations are given, arising in mathematical physics and biology, as follows:

(A) Second-order discrete $p-$Laplacian equations of the form

$$\Delta_p^2 u(k-1) - V(k)\, u(k) \left| u(k) \right|^{q-2} + \lambda b(k) u(k) \left| u(k) \right|^{r-2} = 0, \tag{4}$$

with $r > p \geq q > 1$.

(B) Higher even-order difference equations. A model equation is the fourth-order extended Fisher-Kolmogorov equation

$$\Delta^4 u(k-2) - a\Delta^2 u(k-1) + V(k)\, u(k) \left| u(k) \right|^{q-2} - \\ \lambda b(k) u(k) \left| u(k) \right|^{r-2} = 0, \tag{5}$$

with $r > q > 1$.

(C) Second-order difference equations with cubic and quintic nonlinearities of the forms

$$\Delta^2 u(k-1) - V(k)\, u(k) + \lambda(b(k) u^3(k) + c(k) u^5(k)) = 0. \tag{6}$$

Further, we study also a problem for equation with variable periodic exponents $\Delta^2_{p(k-1)} u(k-1) - V(k)|u(k)|^{q(k)-2} u(k) + f(k, u(k)) = 0$, $u(k) \to 0, |k| \to \infty$ The results are published in [3].

References

[1] H. Brezis, L. Nirenberg, Remarks on finding critical points, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44** (1991) 939–963.

[2] A. Cabada, C. Li and S. Tersian, On Homoclinic Solutions of a Semilinear p-Laplacian Difference Equation with Periodic Coefficients, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Difference Equations, Volume 2010, Article ID 195376, 17 pages doi:10.1155/2010/195376.

[3] M. Mihilescu, V. Radulescu, S. Tersian, Homoclinic solutions of difference equations with variable exponents. Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder University Centre, Volume 38, 2011, 277–289.

π-extensions of semigroup C^*-algebras

V.H.Tepoyan

Kazan State Power Engineering University

E-mail: *tepoyan.math@gmail.com*

In his well known work [1] Coburn proved that all isometric representations of semigroup $\mathbb{Z}_+$ of non-negative integers generate canonically isomorphic C^*-algebras. Douglas in [2] showed that the same statement holds for the positive cone of $\mathbb{R}$. Murphy [6] proved the same for positive cone of abelian totally ordered groups. On the other hand Murphy [6] and Jang [5] showed that this is not true for semigroup $\mathbb{Z}_+ \backslash \{1\}$. Note, that Raeburn and Vittadello [8] study a special case of the representations of this semigroup, namely isometric representations with commuting range projections.

We study inverse extensions of semigroup C^*-algebras. For this purpose we use a notion of an inverse representation which substitutes the requirement of commuting range projections.

An isometric representation of an abelian semigroup is called *inverse* if an involutive semigroup generated by this representation is inverse. We show that every regular representation is inverse. Denote by $C^*_{red}(S)$ [4, 3] a C^*-algebra generated by a regular representation of an abelian semigroup S, it is called *reduced semigroup C^*-algebra* . By $C^*(S)$ we denote the enveloping C^*-algebra of S [7]. It follows from Coburn's theorem that $C^*(\mathbb{Z}_+)$ is isomorphic to $C^*_{red}(\mathbb{Z}_+)$.

A π-extension of a semigroup S is an abelian subsemigroup of the semigroup of all isometries in $B(H)$ which contains the range of representation of S. We show that the enveloping C^*-algebra of a π-extension of semigroup $\mathbb{Z}_+$ coincides with the C^*-algebra generated by representation π of $\mathbb{Z}_+$, if and only if this π-extension is a semigroup of finite Blaschke products.

For an abelian semigroup S π-extension is called *inverse* if the involutive semigroup generated by this π-extension is inverse. We show that if π is an irreducible representation of $\mathbb{Z}_+$, then there doesn't exist non-trivial π-extension. In case of reducible representation π, the number of non-isomorphic inverse π-extensions is continuum. On the other hand for any semigroup S there exists at least one non-inverse π-extension for every representation π.

References

[1] L.A. Coburn, The C*-algebra generated by an isometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**(1967), 722-726.

[2] R.G. Douglas, On the C*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries, *Acta Math.* **128**(1972), 143-152.

[3] S.A. Grigoryan, A.F. Salakhutdinov, C*-algebras generated by cancellative semigroups, *Siberian Math. J.*, 51:1, 12-19, 2010

[4] S.Y. Jang, Uniqueness property of C*-algebras like the Toeplitz algebras, *Trends Math.* **6**(2003), 29-32.

[5] S.Y. Jang, Generalized Toeplitz algebras of a certain non-amenable semigroup, *Bull. Korean Math. Soc.* **43**(2006), no. 2, 333-341.

[6] G.J. Murphy, Ordered groups and Toeplitz algebras, *J. Operator Theory* **18**(1987), 303-326.

[7] G.J. Murphy, Crossed Products of C*-algebras by semigroups of automorphisms, *Proc. London Math. Soc.* **68**(1994), 423-448.

[8] I. Raeburn, S.T. Vittadello, The isometric representation theory of a perforated semigroup, *J. Operator Theory*, **62:2** (2009), 357-370

The order three right hypergroups over group arising from symmetric group S_4

P. Zolfaghari

Introduction The notion of a hypergroup over group was introdused in [1]. The right hyprtgtoup over group is a pair (M, H), consisting of a set M and a group H, together with a system of eight structural maps $\Omega = (\Phi, \Psi, \Lambda, \Xi, e, \kappa, \omega)$, which satisfy twenty conditions.

Here we continue the research of hypergroups of order 3 over group, that we had begun in [2]. In [2] we had described all hypergroups of order 3, arising from symmetric group S_3. We had obtained that there exist, up to isomorphisms, three different such hypergroups ([2], proposition 4). In this repoet we investigate the hypergroups of order 3, arising from S_4. We establish that (up to isomorphisms) these hypergroups one to one correspond to hypergroups of order 3, arising from S_3. The corresponding hypergroups have coinciding structural maps Ξ and ω.

Main results

The lattice of subgroups of the symmetric group S_4 is well known. It contains three subgroups of order 8:

$$H_1 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1324), (1423)\};$$
$$H_2 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\};$$
$$H_3 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (14), (23), (1243), (1342)\}.$$

Each of these subgroups contains normal subgroup $K = \{(1), (12)(34)),$ $(13)(24), (14)(23)\}$. The subgroups H_1, H_2 and H_3 are conjugate. Consequently, according to proposition 3 of [2], any hypergroup over H_i is isomorphic to a hypergroup over a fixed H_j. Therefore, to find all hypergroups of order 3, arising from S_4, up to isomorphisms, it is sufficient to research only the hypergroups, associated to one of subgroups H_1, H_2 and H_3, for example, to $H = H_1$.

Any subgroup H_i has 64 (right) unitary complementary sets M. Two such sets $M = \{e, a, b\}$ and $\acute{M} = \{e, \acute{a}, \acute{b}\}$ are called equivalent if:

$$\overline{a} = x.a, \quad \overline{b} = y.b, \quad x, y \in K.$$

Thus, the equivalence class of any M consists of 16 complementary sets to H_i, and we have 4 such equivalence classes. In case $H = H_1$ we can take the following representatives of these equivalence classes:

$$\begin{aligned}
\underline{M_1} = &\quad \{(1), (123), (132)\}, \\
\underline{M_2} = &\quad \{(1), (13), (132)\}, \\
\underline{M_3} = &\quad \{(1), (13), (23)\}, \\
\underline{M_4} = &\quad \{(1), (123), (23)\}.
\end{aligned}$$

Proposition 1. *The set of all (right) unitary complementary sets to H in S_4 is a union of four equivalence classes (each of which contains 16 sets). If two (right) unitary complementary sets to H belongs to the same equivalence class, the corresponding hypergroups are isomorphic.*

Corollary 1. *To find all, up to isomorphisms, (right) unitary hypergroups of order 3, arising from S_4, it is sufficient to calculate all (right) unitary hypergroups with basic sets $\underline{M_1}$, $\underline{M_2}$, $\underline{M_3}$ and $\underline{M_4}$ over $H = H_1$.*

Proposition 2. *The structural maps of hypergroups $\underline{M_i}(i = 1, 2, 3, 4)$ over H are explicitly given in the corresponding table.*

Corollary 2. *After the corresponding identification of elements of set $\underline{M_i}$ with elements of set M_i in proposition 4, [2] $(i = 1, 2, 3, 4)$ its structural maps $\underline{\Xi}_i$ and Ξ_i, $\underline{\omega}_i$ and ω_i coincide.*

This corollary is a particular demonstration of a general theory ([3]). The hypergroups $\underline{M_i}(i = 1, 2, 3, 4)$ over H are reducible and are reduced to irreducible hypergroups M_i over $Z_2(i = 1, 2, 3, 4)$ that we have in proposition 4, [2].

References

[1] Dalalyan S.H., *On hypergroups, prenormal subgroups and the simplest groups*, Conf. dedicated to 90-anniversary of M.M. Jrbashyan, 2008, Yerevan, 12-14.

[2] Zolfaghary P., *The hypergroups of order 3, arising from symmetric group S_3*, Conf. in Isfahan 7-9 March, 2012.

[3] Dalalyan S.H., *The reducibility theory for hypergroups over group*, Conf. of Armenian Mathematical Union, Yerevan, 29 May - 2 June 2012.